



Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**  
Primeiro semestre de 2025

## **Mecânica Quântica**

12/03/2025 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

**QUESTÃO 1: OSCILADOR HARMÔNICO**

Considere uma partícula de massa  $m$  movendo-se em um potencial harmônico unidimensional dado pelo hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{X}^2}{2},$$

onde  $\omega$  é a frequência angular,  $\hat{X}$  é o operador posição, e  $\hat{P}$  é o operador momento linear.

- (a) (20%) Calcule a incerteza da posição,  $\Delta X$ , quando a partícula se encontra em um autoestado  $|n\rangle$  do hamiltoniano.
- (b) (20%) Calcule o produto das incertezas,  $\Delta X \Delta P$ , para o autoestado  $|n\rangle$ , onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Mostre que esse produto satisfaz o princípio da incerteza de Heisenberg.
- (c) (10%) Suponha que a partícula esteja inicialmente no estado  $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{2}|n=1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|n=2\rangle$ . Determine o estado do sistema  $|\psi(t)\rangle$  para um instante de tempo  $t$  qualquer.
- (d) (30%) Calcule a incerteza da posição quando a partícula se encontra no estado  $|\psi(t)\rangle$  obtido no item (c).
- (e) (20%) Calcule o produto das incertezas,  $\Delta X \Delta P$ , para o estado  $|\psi(t)\rangle$ . Mostre que esse produto satisfaz o princípio da incerteza de Heisenberg para todo instante de tempo  $t$ .

**Dados:**

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

**QUESTÃO 2: MOMENTO ANGULAR**

Seja  $\hat{\vec{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$  o operador momento angular orbital de uma partícula.

- (a) (30%) Obtenha a representação matricial do momento angular na direção  $x$ ,  $\hat{L}_x$ , na base de autoestados de  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$ , denotada por  $\{|\ell, m\rangle\}$ . Para isso, considere apenas o subespaço  $\ell = 1$ .
- (b) (20%) Calcule os autovalores e autovetores de  $\hat{L}_x$ , representando os autovetores na base  $\{|\ell = 1, m\rangle\}$ .

Considere agora que a partícula se encontra em uma superposição de autoestados de  $\hat{L}_z$  dada por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\ell = 1, m = 1\rangle + |\ell = 1, m = -1\rangle).$$

- (c) (30%) Represente  $|\psi\rangle$  na base de autovetores de  $\hat{L}_x$ .
- (d) (20%) Supondo que uma medição de  $\hat{L}_x$  seja realizada, obtenha os possíveis resultados dessa medição e suas respectivas probabilidades.

**Dados:**

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_{\pm}|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}|\ell, m\pm 1\rangle$$

---

**QUESTÃO 3: TEORIA DE PERTURBAÇÃO**

Considere um átomo de hidrogênio sujeito a um campo elétrico espacialmente uniforme dado por  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ , onde  $E_0$  é uma constante. Esse campo elétrico gera um potencial perturbativo dado por  $V = -q\vec{E} \cdot \vec{r}$ , onde  $q$  é a carga do elétron.

- (a) (40%) Obtenha a representação matricial da perturbação  $V$  para o subespaço degenerado  $n = 2$ , i.e.,

$$V_{\ell m; \ell' m'} = \langle 2, \ell, m | \hat{V} | 2, \ell', m' \rangle.$$

Deixe sua resposta em termos de uma integral em  $r$ . Dica: Os únicos elementos não nulos da matriz são  $V_{\ell, m; \ell \pm 1, m} = \langle 2, \ell, m | \hat{V} | 2, \ell \pm 1, m \rangle$ .

- (b) (20%) Usando o resultado do item (a), calcule as correções de primeira ordem na energia do nível  $n = 2$ .
- (c) (40%) Suponha agora que em  $t = 0$ , o campo elétrico aplicado se torna dependente do tempo, assumindo a forma  $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \hat{z}$ . Considere que em  $t = 0$ , o átomo se encontra no autoestado  $|n = 2, \ell = 0, m = 0\rangle$  do hamiltoniano não perturbado. Em primeira ordem de perturbação, calcule a(s) probabilidade(s) de transição em um tempo  $t$  qualquer.
- 

**Dados:**

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}, \quad \psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \cos \theta,$$

$$\psi_{2,1,1} = -\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \sin \theta e^{i\phi}, \quad \psi_{2,1,-1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \sin \theta e^{-i\phi},$$

$$i\hbar \frac{dc_n(t)}{dt} = \sum_k e^{i\omega_{nk}t} V_{nk}(t) c_k(t).$$

**QUESTÃO 4: ESPALHAMENTO**

Considere uma partícula de massa  $m$  espalhada por um potencial  $V(\vec{r})$  localizado em torno da origem do sistema de coordenadas. A partícula incide com uma função de onda plana que se propaga ao longo da direção  $z$ . Se  $V(\vec{r})$  tem um alcance suficientemente curto, a solução da equação de Schrödinger estacionária tem a forma assintótica ( $r \rightarrow \infty$ ) dada por

$$\varphi_k(\vec{r}) \sim e^{ikz} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r},$$

onde  $k$  é o módulo do vetor de onda da função de onda incidente, e  $\theta$  e  $\phi$  são os ângulos polar e azimutal, respectivamente.

(a) (35%) Sabe-se que  $f_k(\theta, \phi)$  é obtido a partir da solução

$$\varphi_k(\vec{r}) \sim e^{ikz} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\vec{r} - \vec{r}') V(\vec{r}') \varphi_k(\vec{r}') d^3r',$$

onde

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Tomando o limite  $r \rightarrow \infty$  na função de Green  $G(\vec{r} - \vec{r}')$ , mostre que  $f_k(\theta, \phi)$  pode ser aproximado como

$$f_k(\theta, \phi) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik\hat{r} \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \varphi_k(\vec{r}') d^3r'.$$

(b) (35%) Usando a aproximação de Born (aproximação de primeira ordem no potencial), mostre que

$$f_k(\theta, \phi) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') d^3r',$$

onde  $\vec{q} = \vec{k}_e - \vec{k}_i$ , com  $\vec{k}_i = k\hat{z}$  e  $\vec{k}_e = k\hat{r}$ .

(c) (30%) Calcule a seção de choque diferencial,  $d\sigma/d\Omega$ , para o potencial gaussiano dado por

$$V(\vec{r}) = V_0 e^{-\mu r^2}.$$

Discuta fisicamente a dependência em  $q = |\vec{q}|$  da seção de choque diferencial.

**Dados:**

$$\int_0^\infty dx \, x e^{-Ax^2} \sin(Bx) = \frac{B}{4} \sqrt{\frac{\pi}{A^3}} e^{-B^2/(4A)}$$