

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE -ELETRÔNICA E SISTEMAS

ESTIMAÇÃO DA POSIÇÃO DO BARICENTRO DE
OBJETOS PLANOS PARCIALMENTE OBSERVADOS

Efílico Bízziá de. Souza Filho .

Tese apresentada ao Departamen-
to de Eletrônica e Sistemas da
Universidade Federal de Pernam-
buco como parte dos pré-requisi-
tos para obtenção do título de
mestre em ciências.

Orientador: *Ge, <iafd Juan Tn.ancÁ.ò 'banon*

Dezembro - 1982

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus agradecimentos ao Professor Gerald Jean Francis Banon por ter me ajudado na elaboração deste trabalho, aos demais amigos pela motivação. A senhora Rosa Maria¹ Neves pela dedicação com que datilografou os originais manuscritos e a Naurineide Seabra pela organização dos manuscritos.

RESUMO

A finalidade deste trabalho é uma aplicação do estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^n , no contexto de processamento de imagem. A idéia principal é aplicar esse ferramental na predição da posição do baricentro de objeto sobre uma região dado que foi observado, com o auxílio de uma câmara, a parte central desta região. A motivação principal foi usar tais idéias no problema industrial.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est l'application de l'estimateur linéaire des moindres carrés étendu aux vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^n , dans le domaine du traitement d'images. L'idée principale est d'appliquer cet outil à la prédiction de la position du barycentre d'un objet placé sur un plan de travail sachant qu'une partie seulement de ce plan a été observée au moyen d'une caméra de télévision. La principale motivation a été la résolution de problèmes industriels.

ABSTRACT

The purpose of this work is an application of the least squares estimation for random vectors in euclidian space R^n , in the context of image processing. The principal idea is apply this tool to find on a region the center of mass of an object with the aid of a TV camera, looking at the center of this region. The principal motivation is the use of these ideas in industrial problems

Í N D I C E

Pag.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	- 1 -
CAPÍTULO 2 - ESTIMAÇÃO LINEAR DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS..	- 4 -
2.1 - A Variável Aleatória Função de Y	- 6 -
2.2 - Estimador dos Mínimos Quadrados.....	- 8 -
2.3 - Estimador Linear dos Mínimos Quadrados.....	- 9 -
2.4 - Estimador Linear dos Mínimos Quadrados Extensivo as Va- riáveis Aleatórias em R	- 12 -
CAPÍTULO 3 - PROPOSIÇÃO DO EXPERIMENTO.....	- 18 -
3.1 - Modelação do Experimento.....	- 19 -
3.2 - Formulação Matemática	- 30 -
3.2.1 - Definição dos Vetores Aleatórios.....	- 30 -
3.2.2 - O Estimador Linear dos Mínimos Quadrados.....	- 30 -
3.3 - Perturbação no Canal de Transmissão.....	- 34 -
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO.....	- 44 -
4.1 - O Vetor Observação.....	- 44 -
4.2 - Estimação Considerando o Valor Médio.....	- 47 -
4.3 - O Ruído.....	- 48 -
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO.....	- 66 -
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	- 63 -
APÊNDICE A	- 70 -
APÊNDICE B	- 72 -

CAPÍTULO - 1

INTRODUÇÃO

1 - INTRODUÇÃO

Este trabalho busca associar alguns fundamentos matemáticos, particularmente na área de estatística usando o conceito de estimação, a aplicação em um problema de engenharia, dando uma visão ao leitor de como atacar um problema prático através da matemática, além de mostrar as principais dificuldades do problema de estimação.

Obviamente, cada problema encontrado era diversos casos tem diferentes necessidades e podem ser tratadas distintamente. Isto permite, uma ampla liberdade na escolha dos ferramentais destinados à solução do problema. De fato, no nosso caso a ser estudado propomos como solução o estimador linear dos mínimos qua-

2

drados extensivo as variáveis aleatórias em R^n , embora se possa contorná-lo de outra maneira, como veremos mais adiante.

Tal ferramental matemático será destinado a estimação da posição do baricentro de objetos planos parcialmente observados. Isto é, dado que observado através de uma câmara uma região que será designada como região ativa, aonde se encontra o baricentro desse objeto sobre um plano indicado como plano de ação, como mostra a Figura 1.1.

Este é o nosso principal interesse, isto é, tentar deduzir o baricentro de um objeto sobre o plano através da observação da câmara, usando o estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^n .

Como mencionado anteriormente, existem outras maneiras de se determinar o baricentro, por exemplo, a câmara poderá variar o plano de ação até encontrar inteiramente o objeto, consequentemente, isto poderia acarretar em um grande esforço computacional, além do tempo perdido na busca do objeto. Naturalmente, é

TESE DE MESTRADO

ESTIMAÇÃO DA POSIÇÃO DO BARICENTRO DE
OBJETOS PLANOS PARCIALMENTE OBSERVADOS

EU.KA.CO BezefLo. de Souza *YÁlko*

DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E SISTEMAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CIDADE:-: UNIVERSITÁRIA
RECIFE - BRASIL

- 1982 -

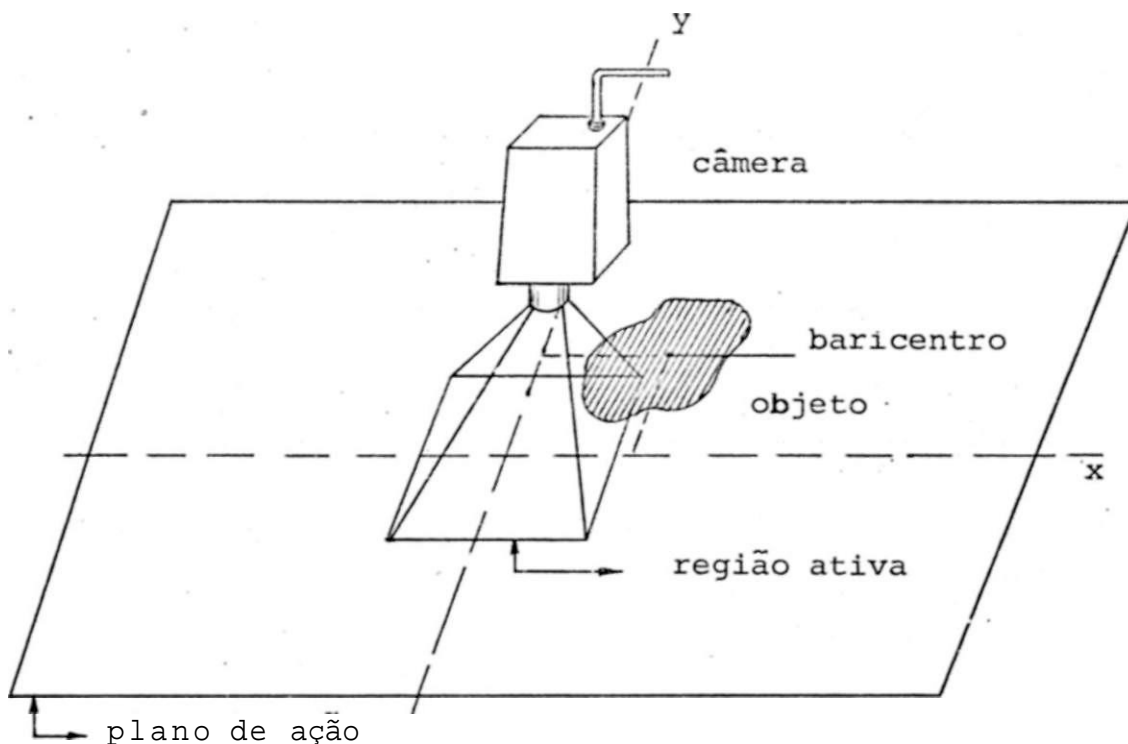


Fig.1.1 - REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DO EXPERIMENTO

um tanto brutal esta solução. Por outro lado, a proposição de se usar um estimador como descrito anteriormente possivelmente "atingirá" o baricentro de maneira mais rápida, usando menos recursos computacionais.

Todo este trabalho será realizado por simulação em um computador- aonde teremos um modelo para o experimento de forma a obter um algoritmo simples de estimação da posição do baricentro.

Atualmente, nas indústrias começam a surgir, os mecanismos capazes de imitar os movimentos humanos, conhecidos como autômatos. A rápida emergência desses mecanismos é como consequência do grande desenvolvimento na indústria de computadores, microcomputadores e microprocessadores. É neste campo da robótica destinados a fins industriais que está a principal motivação desse trabalho, isto é, usamos um autômato na realização de uma tarefa que se limita a pegar peças ou objetos sobre uma esteira, e dentro deste contexto introduzimos a idéia da estimação da posição do baricentro de

objetos plano parcialmente observados.

Os capítulos que seguem são uma sequência de todo material necessário ao problema, e serão apresentados numa sequência até atingir o terramental básico usado na estimação de variáveis aleatórias.

No capítulo III, nós colocamos o problema industrial considerando um caso geral, descrevendo todo o processo até introduzir a idéia da estimação do baricentro. Em seguida impomos algumas restrições ao problema, principalmente devido as limitações computacionais. Introduzimos o conceito de variáveis aleatórias associadas ao problema, e uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de posições, possibilitando a aplicação do estimador linear dos mínimos quadrados.

Discutiremos o problema relacionado com a escolha do vetor observação localizando as principais dificuldades quanto a esta escolha.

Levaremos em consideração o valor médio das grandezas envolvidas no problema, como sendo uma informação a mais na estimação do baricentro.

No parágrafo seguinte, consociamos o problema de estimação com o ruído, isto é, admitimos que os sinais de vídeo são transmitidos por um canal com ruído aditivo supondo conhecida suas propriedades estatísticas.

No capítulo IV, serão mostrados os resultados de estimação, para figuras diferentes evidenciando os resultados com figuras de dupla limetria e figuras não simétricas.

E finalmente no capítulo V, apresentamos a conclusão do trabalho.

Os **apêndices** servem como complemento para o esclarecimento de alguns resultados obtidos nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO - 2

ESTIMAÇÃO LINEAR DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2 - ESTIMAÇÃO LINEAR DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Há algum tempo devido ao grande desenvolvimento tecnológico dos circuitos digitais, e a grande versatilidade dos sistemas digitais, vem-se dando ênfase ao estudo da matemática estatística* quanto a aplicação em problemas de engenharia. Nos mais diversificados problemas encontrados em diversas áreas de interesse, notamos em particular que as pesquisas se voltam ao estudo de decisão e inferência estatística e estimação, como exemplo de aplicação deste ferramental, e de grande importância prática, temos a utilização de autômatos, principalmente na indústria. Evidentemente existem diversos problemas associados a criação de um autômato, que podem ser abordados através de um procedimento estatístico, tais como o estudo da mobilidade ou estudos de aparelhos sensitivos da máquina, aonde se encaixam pesquisas sobre a visão do autômato que por sua vez está diretamente ligado a análise de cenas e reconhecimento de padrões, etc. Dentro de cada uma destas áreas de estudo¹ existe uma vasta gama de variação do ferramental matemático que pode ser usado em um determinado problema, vejamos, por exemplo, as aplicações relacionadas ao reconhecimento de formas, donde o ferramental básico envolvido do ponto de vista estatístico trata-se da teoria da decisão e inferência estatística, logo é possível a abordagem deste determinado problema por diversas técnicas de decisão. É importante notar que não existe apenas uma única maneira de se¹ tratar um dado problema, sendo, portanto, necessário apresentar¹ • que regra ou critério estão sendo propostos para resolver o problema em questão. Em todos os casos, a escolha de uma regra ou critério para solucionar um problema, naturalmente deve ter uma razão, que sempre, nestes casos, estão voltados ao ponto de vista de otimização, e por outro lado a facilidade de se obter um algoritmo¹

simples e eficiente.

Particularmente no nosso estudo, estimação da posição¹ do baricentro de objetos planos parcialmente observados; o ferramental que será usado é relativo ao estimador linear dos mínimos¹ quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^2 . Evidentemente¹ existe razões pelas quais o estimador linear dos mínimos quadrados foi usado neste tipo de aplicação. Inicialmente a classe dos estimadores lineares não envolve o conhecimento completo da lei conjunta de X e Y , mas apenas os momentos de primeira e segunda ordem, e daí a construção de um algoritmo de estimação baseado simplesmente sobre a classe dos lineares tornam-se simples e fáceis de serem aplicados.

Por outro lado, nós estamos interessados no melhor preditor ou estimador possível. Quando falamos em melhor possível estamos diante do problema fundamental da predição ou estimação, isto é, como podemos determinar uma possível forma funcional para um preditor, tal que nos dê o melhor preditor da variável de interesse? Para resolvermos tal problema é necessário definir o que signifique o melhor preditor possível. De fato, na solução deste problema é preciso ignorar as implicações filosóficas de "o melhor possível" e daí especificar o preditor ou estimador que tenha certas¹ propriedades, tanto com relação a sua importância por razões intuitivas, ou quanto a sua comprovada utilidade dentro de diversas¹ aplicações.

Em virtude desses fatos, nós usamos como medida de "o melhor possível" a media quadrática da diferença entre a variável aleatória X e o seu estimador \hat{X} , pois o melhor estimador neste caso será aquele que minimize esta diferença. Logo, as razões pelas quais nós escolhemos o critério dos mínimos quadrados deve-se ao fato de ser um critério já bem estudado em várias situações, ve

ja por exemplo, Optimization by Vector Space Methods de David G. Lucnberger. e além disso os erros grande de estimação são severamente penalizados, e os pequenos erros de estimação serão insignificantes.

Desde que o trabalho aqui a ser apresentado, trata-se da aplicação do estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^n a um problema industrial na área da robótica, apresentaremos a seguir todo o desenvolvimento teórico ao estudo desse estimador.

2.1. - A Variável Aleatória Função de Y

Sendo o nosso problema de predição, ou seja, um caso particular de estimação de variáveis aleatórias, é importante introduzir algumas propriedades e conceitos matemáticos, tais como, a caracterização de uma variável aleatória função de Y, pois, do problema relativo a estimação, temos que do resultado de um experimento que associa um valor x a variável aleatória X e um valor y a variável aleatória Y . Entretanto, apenas c s valores de Y são possíveis de ser observados, e na realidade o que nos interessa são os valores de X , então é necessário que passamos a caracterizar um conjunto de variáveis aleatórias apenas função de Y , e daí escolher os estimadores de X dentro desse conjunto.

O problema de estimação é colocado matematicamente da seguinte forma:

Sejam Q e S conjuntos quaisquer, e $X: \Omega \rightarrow S$ e $Y: \Omega \rightarrow Q$, duas aplicações conhecidas. Se a realização do experimento for ω e o valor observado de Y for $Y(\omega) = y$, então, o que podemos dizer com relação a $X(\omega)$, ou seja, nós estamos interessados em procurar a melhor avaliação possível de $X(\omega)$ a partir da

observação $Y(\omega)$, segundo um critério a ser definido. Desse resultado da avaliação é associado um valor x que será visto como o valor assumido pela variável aleatória X função de Y , designado como estimador de X dado que a observação foi Y .

Y

Denotaremos U como sendo o conjunto de todas as variáveis aleatórias que são funções de Y , e daí finalmente caracterizaremos as variáveis aleatórias funções de Y para o caso particular de U finito.

Y

particular de U finito.

As variáveis aleatórias funções de Y deve satisfazer pelo menos uma das seguintes propriedades, pois elas são equivalentes:

i) $U \in U^*$

ii) $U = g(Y)$ com probabilidade um, aonde g é uma função mensurável.

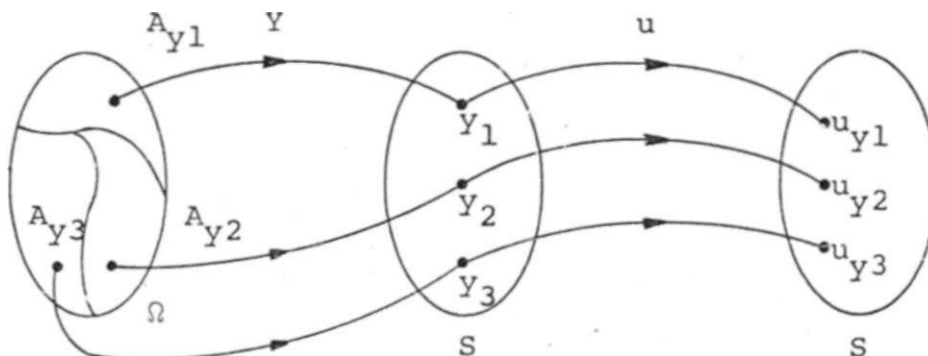
iii) $U = I_{A \circ Y}$ com probabilidade um aonde:

$$I_{A \circ Y} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$I_{A \circ Y}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

e u , é uma aplicação mensurável de S em S .

As propriedades dos itens "i" e "ii" são bem evidentes, no entanto o item "iii" é um tanto obscuro, sendo fácil de ser entendido pelo diagrama abaixo:



do diagrama nos observamos què:

$$U(\omega) = \begin{cases} u_1 & \text{se } \omega \in A_1 \\ u_2 & \text{se } \omega \in A_2 \\ u_3 & \text{se } \omega \in A_3 \end{cases}$$

ou seja, $U(\omega) = u(\omega)$, que em uma representação mais compacta temos:

$$U(\omega) = \sum_{i=1}^3 u_i 1_{A_i}(\omega)$$

2.2. - Estimador dos Mínimos Quadrados

Neste parágrafo faremos um breve estudo sobre o estimador dos mínimos quadrados.

Considerando X e Y variáveis aleatórias reais e de segunda ordem. Damos a seguinte definição para o estimador.

Definição: \hat{X} é o estimador dos mínimos quadrados de X dado Y se, e somente se, \hat{X} é o estimador de Bayes de X dado Y relativo a função custo:

$$C: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \quad C_1(u, v) = (u - v)^2$$

Desde que \hat{X} é o estimador de Bayes relativo a função custo C , então deve satisfazer as seguintes condições:

- i) X e U^x
- ii) $EC_1(X, \hat{X}) < EC_1(X, U)$ $\forall U \in U^x$

Como U representa o conjunto de todas as variáveis

aleatórias funções de Y , então a condição (i) é satisfeita desde que pela própria colocação do problema de estimação, apenas a variável aleatória Y é observada, ou seja, deduz-se X a partir de Y . Por outro lado a condição em (iii) nos garante que \hat{X} é a variável aleatória que leva ao menor custo envolvido na estimação, daí o nome de mínimo quadrado.

Um fato altamente importante, é que \hat{X} , e o estimador dos mínimos quadrados de X e não "um dos estimadores dos mínimos quadrados".

A razão da unicidade vem do fato que \hat{X} satisfaz a condição:

$$E(X - \hat{X})^2 = \min_{\hat{X}} E(X - \hat{X})^2$$

que é uma condição equivalente da propriedade ii do estimador de Bayes quando a função custo for $C(x) = (x - \hat{x})^2$.

A seguir estudaremos uma classe particular de estimadores dos mínimos quadrados que designamos como a classe dos "estimadores lineares". Esta classe de estimadores tem uma vantagem, sob o ponto de vista prático, não envolve o conhecimento completo da lei conjunta de X e Y mas, somente os momentos de primeira e segunda ordem como veremos mais adiante.

2.3. - Estimador Linear dos Mínimos Quadrados

Agora não precisamos mais supor que X e Y assumem um número finito de valores reais (X e Y finitos) / basta apenas fazer as hipóteses que X e Y são variáveis reais de segunda ordem, ou seja, os momentos $E(X^2)$ e $E(Y^2)$ são finitos. Naturalmente pela desigualdade de Schwarz, podemos garantir a existência do valor esperado do produto XY , ou seja, a correlação entre duas va -

riáveis/ isto é:

$$EY < .EX^2 + EY^2$$

Seja H^y um subconjunto particular de U^y que possui todas as variáveis aleatórias dependendo de Y linearmente, isto é, numa notação mais compacta temos:

$$H^y = L(Y) = \{a Y; a \in R\}$$

Definição: X é o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado que a observação é Y se, e somente, X é a solução do seguinte problema:

- i) $X \in H^y$
- ii) $E(X-U)^2 < E(X-U)^2 \forall U \in H^y$

Notemos que este estimador **também** é único, pois o subconjunto $L(Y)$ está contido em U^y .

Logicamente, da definição de X e das propriedades anteriormente citadas, podemos enunciar outra definição para o estimador, ou seja:

(Definição Equivalente de X): X é o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado $Y \in P$, e somente se, X é a solução do seguinte problema:

- i) $r. G H^y$
- ii) $E(X-U) = EX - E(U) \forall U \in H^y$.

Com essa nova definição conseguimos mostrar facilmente a unicidade do estimador, pois se considerarmos que existem duas

soluções possíveis e H^y , chegaremos ao inevitável resultado que :

$$E(U - Z)^2 = E(X - Z)^2$$

$$E(Z^2 - 2Z_1 + 1)^2 = 0^*$$

Donde garantimos que $P(Z = 1) = 1$ Probabilidade 1.

Daremos agora uma rápida explanação do ponto de vista geométrico, pois o mesmo ajuda na interpretação do estimador.

2

Consideremos $H = L(X, Y) = \{aX + 3Y; (a, B) \in R\}$, com esta definição de H o mesmo representará um espaço vetorial, e portanto, uma variável aleatória, $U \in H$ será vista como um vetor de H, Sendo H um espaço vetorial, daremos algumas definições relativas a este espaço, por exemplo, como a medida de distância, dando um sentido geométrico aos momentos de segunda ordem, a correlação e a covariância entre variáveis aleatórias.

Definimos:

- a) O produto escalar: $U, V \in H; \langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^2 U_i V_i = EUV$
- b) A norma de um vetor: $U \in H; \|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle} = \sqrt{EU^2}$
- c) A distância entre vetores: $\|U - V\| = \sqrt{\langle U - V, U - V \rangle}$

como podemos perceber o produto escalar, representa a correlação entre as duas variáveis U e V; no item b, vemos que a norma de um vetor nos dá como resultado o desvio padrão de uma variável aleatória se EX e EY for zero, e finalmente o item c, que dá uma medida de distância entre as variáveis aleatórias U e V.

Nota-se que neste contexto o estimador X elemento de H^x , aparece como sendo o vetor mais próximo de X dentro da classe H^y , pois da primeira definição temos :

$$\|X - U\|^2 < \|X - V\|^2 \quad U \in H^y$$

ou seja: $E(X - X)U = 0 \quad U \in H^y$.

Isto nos indica que $X - X$ é um vetor perpendicular ao

espaço H^y , pela própria definição de produto interno.

Com este novo tratamento, podemos encontrar uma definição explícita de X .

(Definição Equivalente de X): X é o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado Y se, e somente se.

$$X = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|Y\|^2} Y \quad \text{com probabilidade um.}$$

Através desta definição e dos comentários anteriores, nós podemos dar uma interpretação geométrica, mostrada na Figura 2.3.1, desse estimador. Observando a figura notamos então que para algum vetor X em H , existe um único vetor \hat{X} em H^y , tal que $X - \hat{X} \perp H^y$, ou seja, \hat{X} é o estimador linear que minimiza a distância entre X e H^y .

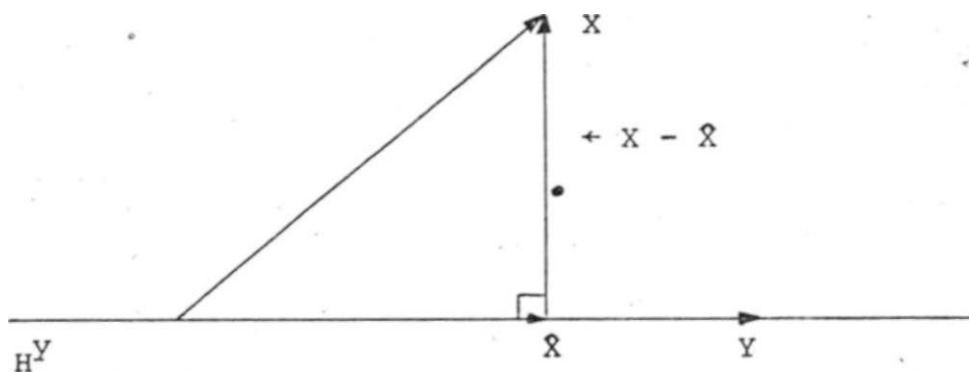


Fig.2.3.1. - REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESTIMADOR LINEAR DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

2.4 - Estimador Linear dos Mínimos Quadrados Extensivo as Variáveis Aleatórias em R^n

Agora neste ponto daremos particular ênfase a este parágrafo, pois será constituído do material básico usado no algoritmo de estimação da posição do baricentro de objetos planos parcialmente observados.

Expressao Geral do Estimador:

Em geral, do ponto de vista prático, quando é realizado um experimento, a observação pode se apresentar como resultado de diversas medidas. Além disso, em muitas aplicações, como no nosso caso, estamos interessados em mais de uma grandeza a ser estimada. Daí, existe a necessidade de se estender o conceito da estimação linear dos mínimos quadrados ao caso das variáveis aleatórias em R^n , ou seja, o que se pode dizer ou predizer a respeito de uma variável aleatória X em R^n dado que observamos Y em K .

Como no capítulo anterior, basta apenas supor que os momentos de segunda ordem sejam finitos ($E|X_j| < \infty$, $E|Y| < \infty$, onde $|X| = X'X$ e $|Y| = Y'Y$, em que o índice "'" representa o vetor transposto) para garantir a existência do estimador.

O estimador linear dos mínimos quadrados do vetor X dado que observamos um vetor Y , apresenta-se como uma variável aleatória da forma.

x_i .

$$X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{aonde para cada } i = 1, \dots, n$$

x_i é o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado o vetor observação Y . Desta forma \hat{X} torna-se um elemento de $(R^n)^n$, onde:

$$(\hat{X})^n = H^y x_1 \dots x_n H^y = \hat{Y}G: G \in R^n \times m$$

n vezes

$$\text{é } H = L(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \{Y: a \in R\}$$

Agora daremos uma definição do estimador linear dos m.q. extensivo as v.a. em R^n , baseado em algumas propriedades de y_n

um dado vetor do conjunto (H) .

Definição: X é o estimador linear dos mínimos quadrados de um vetor X dado o vetor observação Y se, e somente se, X é solução de um dos seguintes problemas.

- i) $E |X-X| < E|JX-U| \wedge U \in (H^y)^n$
- ii) $EX'U = EX'U \quad V \quad u \in (H^y)^n$
- iii) $EXU' = EXU' \quad V \quad U \in (H^y)^n$

Os problemas em i, ii e iii são todos equivalentes (veja (2) mas a condição em i é a que nos dá uma melhor visão do ponto de vista de mínimo quadrado.

Naturalmente, quando usamos o estimador linear dos mínimos quadrados, é necessário colocá-lo de forma mais compacta, ou seja, estabelecer uma expressão explícita para o estimador, permitindo que seja possível a construção do algoritmo.- De fato uma expressão explícita do estimador, isto é, colocar X em função de Y , nada mais é do que encontrar uma matriz G e $R^{n \times m}$, tal que $\hat{X} = GY$, satisfazendo as condições encontradas na definição anterior.

Definição Equivalente de X): X é o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado Y se, e somente se:

$$X = EXY'(EYY')^{-1}Y \quad \text{com probabilidade um se } (EYY') \text{ for não singular.}$$

Como resultado acima é de extrema importância para nós então apresentaremos a validade dessa definição equivalente no

no Apêndice A.

Se EYY' for singular isto significa dizer que H' é de dimensão menor que m , em outras palavras podemos dizer que pelo menos uma linha ou coluna da matriz de correlação de Y são linearmente dependentes. Ainda que X seja único, a expressão explícita de X função de Y não será única, pois neste caso substitui-se $(EYY')^{-1}$ por uma matriz pseudo-inversa de EYY' .

Nós falamos anteriormente da unicidade do estimador, entretanto, não fizemos nenhum comentário com relação a este fato. Do ponto de vista de estimação, a unicidade é uma propriedade extremamente forte, pois, isto garante que dentro da classe destes estimadores, existe apenas um capaz de minimizar o erro médio quadrado, ou seja, para cada observação teremos a certeza de estarmos trabalhando com uma condição ótima, caso contrário, teríamos de averiguar dentro de um subconjunto desta classe, aquele ou aqueles que fornece a melhor estimação para cada caso particular de observação. Isto do ponto de vista computacional seria extremamente inviável, devido ao esforço computacional solicitado a máquina.

Dada a importância da existência de um único estimador, no apêndice A apresentaremos a prova da unicidade.

- No tocante ao estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^n , existe uma série de propriedades, bem definidas, que vem facilitar o seu uso em diversas aplicações que por sua vez o torna mais acessível quanto a sua análise dentro do problema estudado.

No próximo parágrafo, nos deteremos ao estudo, de algumas das principais propriedades, nas quais algumas delas serão usadas no problema de estimação da posição do baricentro.

- Se $EY^*Y^* = 0$ então o estimador linear dos mínimos quadrados de X dado x , e Y (vetores aleatórios) verifica:

$\hat{E}(X/Y_1, Y_2) = \hat{E}(X/Y) + \hat{E}(X/Y)$ aonde O representa a matriz nula e $\hat{E}\{X/Y^*Y^*\}$ o estimador linear.

Suponha que realizamos um dado experimento e fazemos a observação $Y = (Y^1, Y^2, \dots, Y^k)$ e utilizamos o estimador linear dos m.q. para predizer sobre uma grandeza X , ou seja :

$$X = EXY' (EYY')^{-1} Y \text{ com probabilidade um.}$$

Note-se então, que se a observação satisfaz a P^* , nos poderíamos tratar o problema independentemente, sem considerar toda a observação, dividindo a observação em dois vetores distintos.

$P^* -$ Se Σ é não singular então:

$\hat{E}(X/Y, Y) = X + E_{x,y} \Sigma^{-1} (Y - Y)$ com probabilidade um.

Aonde X representa a média da variável aleatória a ser estimada $E_{x,y}$ a matriz de covariância cruzada e S_y a matriz de autocovariância.

Do ponto de vista de aplicação, a estimação da- do que a média é também levada em consideração, apresentará **coíto** resultado um melhor estimador, desde que $EX \neq 0$ e $EY \neq 0$, pois nestes casos a média é uma informação a mais. Entretanto, em alguns casos o uso de P^* é justificados, pois $\hat{E}(X/Y, Y)$ pode ser bastante próximo a $\hat{E}(X/Y)$ significando um maior esforço computacional.

Finalmente, nós apresentaremos uma última propriedade aonde é possível estabelecer uma maneira mais fácil de computar o erro de estimação.

$P^* -$ Se Σ é não singular então a covariância do erro de estimação é dada por :

$$\begin{matrix} x & x & xy & y & xy \\ & & & & \end{matrix}$$

Este resultado é extremamente útil, desde que permite o cálculo do erro médio quadrado, dado pelo traço de E^{-1} apenas através do conhecimento das matrizes de correlação e autocorrelação envolvidas no problema.

Observe que o cálculo do erro pode ser feito por outro caminho, isto é, para cada u e Q fazemos a observação $Y(OJ)$, com essa observação determinamos o valor $X(OJ)$, se $X(\ddot{U}J)$ for conhecido, então podemos facilmente determinar $(X-\%)$ para toda posição particular ω se ω for finito. Logo desta forma, poderemos determinar $E(X-X)$. No entanto, poderá acontecer que a cada posição particular de u e Q a variável aleatória $X(w)$ assumirá um único valor mas a observação $Y(OJ)$ poderá assumir alguns valores distintos, que por sua vez, do ponto de vista computacional o cálculo do erro através de E^{-1} é muito mais coerente, que o cálculo do erro para cada posição particular com estes vetores observação, ou seja, o cálculo dado pelo traço E^{-1} resultará num menor esforço computacional.

CAPÍTULO - 3

PROPOSIÇÃO DO EXPERIMENTO

3 - PROPOSIÇÃO DO EXPERIMENTO

Será abordado neste capítulo, a aplicação do ferramental matemática em um problema específico destinado a aplicações industriais.

Toda nossa idéia de estimação da posição do baricentro de objetos planos parcialmente observado é motivado pelo atual desenvolvimento na indústria de autômatos destinados a realizar certas tarefas.

O primeiro parágrafo deste capítulo se restringe a introduzir o problema principal começando pela utilização do autômato na realização da tarefa de retirar peças de uma esteira.

Usaremos para o medeio de autômato uma mão mecânica , acoplado por uma unidade de controle a um sensor óptico, uma camera de televisão que focaliza a região central da esteira, isto e, do plano de ação que divide a esteira em regiões idênticas. A preocupação a princípio será a localização da peça sobre o plano pela observação da região central, e como solução para este problema, é proposto a localização do baricentro da peça, ou objeto sobre a esteira. A partir deste ponto, todo nosso trabalho é concentrado em como determinar a posição do baricentro sobre o plano de ação, de qualquer objeto sem mais a preocupação do procedimento de como realizará a tarefa.

A seguir introduzimos o problema do ponto de vista geral tratando de certas dificuldades práticas associador com a modelação do experimento.

Finalmente, aprpsentamos o modelo adaptado, para a aplicação dos resultados teóricos obtidos no capítulo anterior

A partir do parágrafo 3.1, formalizaremos matematicamente o problema definindo as variáveis aleatórias, no sentido de

possibilitar a aplicação da definição do estimador linear dos mínimos quadrados, tanto sem levar em consideração o valor médio das variáveis, quanto a consideração do valor médio destas variáveis aleatórias que define o vetor observação, como fonte de informação para a predição do baricentro.

No último parágrafo, apresentaremos o problema de estimação, na qual consideramos que os sinais de vídeo são transmitidos por um canal ruidoso, aonde o modelo para ruído é gaussiano e branco.

Neste parágrafo, trataremos apenas da estimação considerando o valor médio das variáveis associados ao problema, e mencionamos alguns comentários a respeito da escolha das grandezas observadas.

3.1. - Modelação do Experimento

Para a estimação, é natural que haja uma observação, é necessário que antes de inferir ou predizer sobre alguma coisa precisamos de alguma informação auxiliar. Evidentemente, a informação desejada dependerá do tipo de problema estudado, e além disso, o mecanismo pelo qual colhemos estas informações, também estará intimamente ligado ao problema, isto é, qual mecanismo que será usado para colher as informações, por outro lado, quais as informações. Vejamos alguns exemplos, colocando estas idéias. O próprio homem em si, é capaz de usar a intuição tentando predizer sobre algum evento, tal como, se vai chover ou se não vai chover. O senso intuitivo com algum critério de estimação na inferência do evento será baseada a princípio sobre as observações ligadas ao verdadeiro estado da natureza. Naturalmente as observações, onde estão contidas as informações desejadas deve ter alguma corre-

lação com o que se quer predizer, sendo assim, o homem usando do seu bom senso, usara como mecanismo de observação o seu sensor óptico, ou seja, a visão na observação das nuvens, tendo como informação principal a sua cor e dimensão. Outra maneira de se colher as informações seria através dos sensores de temperatura, em que por meio da temperatura ambiente, se está quente ou frio, poder-se-ia inferir sobre a possível ocorrência do evento. Os mecanismos usados podem ser os mais diversificados possíveis, sendo razoáveis aqueles que nos dêem a maior quantidade de informação na extração de grandezas pertinentes, que neste caso, seria a utilização dos sensores ópticos, pois haveria uma maior correlação entre o evento e a grandeza observada. Vejamos em outro tipo de problema, associado a uma aplicação industrial. Em uma indústria no setor de estocagem ou embalagem, tem-se uma esteira que conduz peças idênticas a este setor. Um operário é destinado a executar a tarefa de embalar ou estocar as peças, isto é, o operário retira as peças da esteira, coloca-os na embalagem, ou simplesmente conduz as peças ao estoque. Tal tarefa poderá ser realizada por um mecanismo, ou seja, através de um autômato. Naturalmente, existem diversas razões quanto ao emprego desse mecanismo, entre estas razões podemos citar particularmente a eficiência e consistência no trabalho. Por outro lado, a máquina não terá problemas de fadiga, nem tão pouco a perda de interesse pelo trabalho. Ele poderá trabalhar vinte e quatro horas por dia se necessário, tendo-se o cuidado de reservar algumas semanas por ano, tendo em vista a manutenção do mecanismo.

De fato, o problema proposto, envolve áreas de estudos independentes, tais como, o problema do controle do autômato, as partes mecânicas, as partes elétricas, etc. Aqui neste trabalho, nós imaginamos que a tarefa de retirar as peças da esteira é rea-

lizada por uma mão mecânica e o nosso problema se restringe a seguinte questão: Como fazer a mão pegar a peça sobre a esteira? Naturalmente, se é possível prever a posição do objeto sobre a esteira através da observação da câmara, então a tarefa de pegar o objeto torna-se mais fácil.

Evidentemente neste ponto, fica claro o tipo de problema que queremos abordar, tendo como, ferramenta principal o emprego de um estimador, que no caso será o estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R^n . Com a utilização da câmara para a observação, resta-nos agora modelar o problema e colher as informações necessárias da observação e daí prever ou inferir sobre a posição do objeto na esteira.

Descrição do Experimento:

Voltando ao problema em questão, consideramos que sobre uma esteira em movimento, com uma velocidade constante, peças idênticas sejam colocadas de forma aleatória. A esteira é dividida em semiplanos, designados "planos de ação", e através de um determinado mecanismo a câmara passa a observar uma região central, denominada região ativa de cada semiplano conforme mostra a Fig. 3.1.



Fig.3.1. - REPRESENTAÇÃO DO EXPERIMENTO A UMA APLICAÇÃO INDUSTRIAL,

Feita a observação uma instrução,- através da unidade¹ de controle é enviada a mão mecânica para agarrar a peça, supondo¹ executada a tarefa, a câmara é desligada voltando a observar sobre a região ativa, somente no próximo plano de ação, e assim sucessivamente.

O que interessa é a questão de como enviar a mão mecânica uma indicação da posição do objeto, apenas observando uma parte do objeto, como mostra a Fig.3.1. Entre diversas possibilidades de enviar esta informação, a maneira mais adequada que encontramos foi através das coordenadas do baricentro do objeto, ou seja, dado que observamos uma parte do objeto, aonde se encontra o baricentro? Conhecendo a posição do baricentro dentro do plano é possível executar a tarefa pois a forma é conhecida, isto é, as dimensões¹ do objeto e o contorno geométrico tanto como a orientação são dados como informação a priori.

Quanto, como indicar a posição do objeto sobre o plano de ação, o problema está resolvido, basta conhecer as coordenadas¹ do baricentro do objeto com relação a alguma referência. Agora surge outra questão, a saber, como encontrar estas coordenadas apenas pela observação da região central do plano de ação? A propósito, este é o nosso principal objetivo, donde faremos uso do ferramental do capítulo anterior no desenvolvimento de um algoritmo, mas precisamente, o estimador linear dos mínimos quadrados extensivo¹

2

as variáveis aleatórias em R .

E para usarmos aquele ferramental é necessário definir¹ as grandezas envolvidas no problema ajustando-as aos resultados matemáticos obtidos anteriormente. Neste caso, nós consideraremos primeiramente o conjunto de todas as posições do objeto sobre o plano de ação. designado Ω , e sobre este conjunto, definimos uma densidade de probabilidade uniforme. Poder-se-ia imaginar um outro

tipo de densidade sobre o conjunto em questão, como por exemplo , uma do tipo piramidal bidimensional, dando maior probabilidade de ocorrência aos eventos que se encontram próximo do centro do plano de ação, isto por sua vez garantia que a fonte destinada a colocar as peças sobre este plano dava uma maior concentração em torno da região ativa. Entretanto, não fizemos nenhum levantamento experimental afim de determinarmos uma distribuição de probabilidade para este conjunto, sendo, portanto, perfeitamente aceitável a representação da ignorância que temos com relação a fonte, supor uma densidade de probabilidade uniforme, equivalendo a dizer que o objeto poderá cair em qualquer posição sobre o plano. Além disso, esta suposição trás algumas vantagens, pelo lado da facilidade de implementação do algoritmo destinado a estimação.

Como resultado da observação feita pela câmera teremos uma imagem que será fundamentalmente um conjunto de pequenas áreas escuras e luminosas, aonde cada uma dessas pequenas áreas contém alguma informação visual da cena. Essa imagem é explorada pela câmera numa serie sequencial de linhas horizontais, tal exploração faz com que um sinal de vídeo tenha possibilidade de incluir todos os elementos da imagem. Desde que, nos a imagem é uma tanto simples, ou seja, apenas constituída de uma parte da peça, ou toda peça sobre a região ativa, não interessando os níveis de cinza, mas apenas, a área coberta pela peça sobre o plano, isto porque o importante é a posição ao baricentro, cuja localização depende da forma da peça, ou objeto, isto é, do contorno traçado pela peça, então neste tipo de aplicação basta que o sinal de vídeo seja constituído de dois níveis de tensão, um indicando a presença do objeto representando pontos de massa unitária, e o outro indicando a ausência do objeto, representando pontos de massa nula naquela região, conforme mostra a figura 3.2.

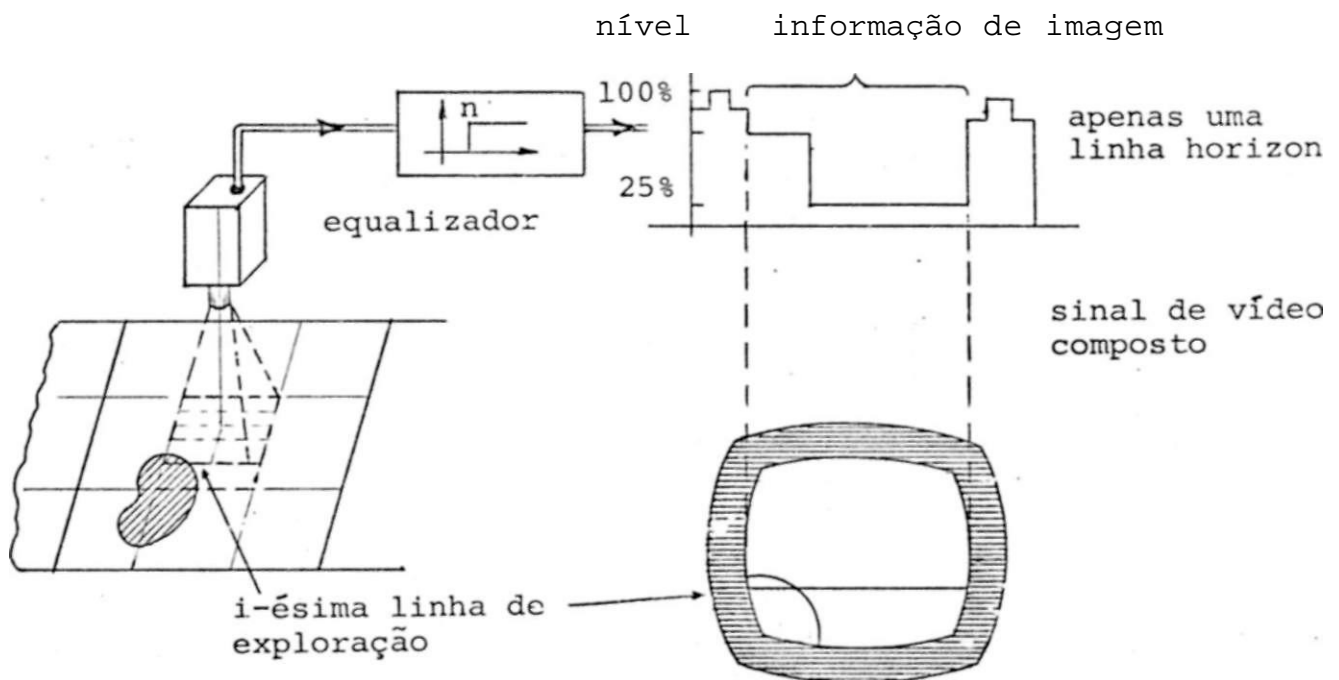


Fig.3.2. - EXPLORAÇÃO HORIZONTAL.

Geralmente o número de linhas de exploração para uma imagem completa é grande afim de fornecer detalhes da imagem, entretanto, no nosso caso é necessário, que a quantidade de pontos amostrados no sinal de vídeo, e o número de linhas horizontais obtidos na exploração da imagem sejam reduzidos ao mínimo apenas para dá detalhes do contorno da peça, pois isto, permite na reconstituição da imagem a formação do perfil da peça em qualquer ângulo pela rotação da peça em torno do baricentro. Por exemplo, a quantidade de linhas e as «.nostras Fig.3.3a e 3.3b são suficiente para representar o contorno da peça em qualquer uma das posições mesmo havendo uma rotação de 90° em torno do Baricentro. O mesmo ocorre com a figura 3.4a e 3.4b, embora o número de linhas e pontos amostrados em cada linha sejam menores.



IX)

U)

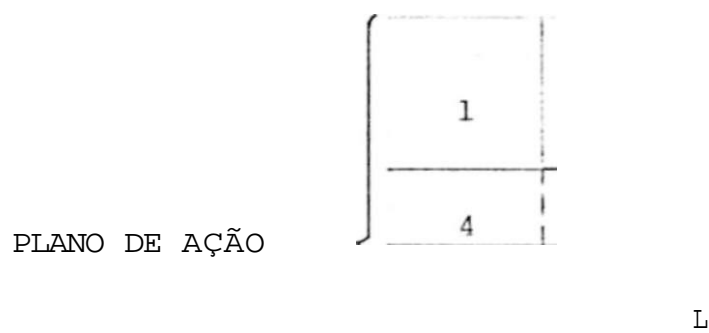
Fig.3.3 - PONTOS AMOSTRADOS SALIENTANDO O CONTORNO DA PEÇA PARA UMA POSIÇÃO PARTICULAR $c_0(b)$ MESMA QUANTIDADE DE PONTOS, SALIENTANDO O CONTORNO APÓS UMA ROTAÇÃO DE 90° EM TORNO DO BARICENTRO NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO.

Fig.3.4 - (a) UMA MENOR TAXA DE AMOSTRAGEM SUFICIENTE PARA SALIENTAR O CONTORNO DA PEÇA. (b) ROTAÇÃO DA PEÇA DE 90° EM TORNO DO BARICENTRO.

Percebemos que nossa imagem é constituída por pontos elementares, e portanto, forma um conjunto finito de pontos, por outro lado o número de posições da peça forma um conjunto não enumerável, desde que podemos deslocar o objeto sobre o plano continuamente, ou seja podemos dá um deslocamento tão pequeno quanto se pode imaginar, isto do ponto de vista teórico, significa que para um mesmo baricentro observado existe uma quantidade não enumerável

de posições. Diante deste fato será conveniente imaginar o plano de ação como um conjunto de pontos finitos formado por uma malha* de linhas verticais e horizontais de tal forma que a quantidade ' de pontos por linha ou coluna na região ativa seja ímpar como mostra a figura 3.5, donde podemos perceber que o plano de ação corresponde a uma área nove vezes maior que a área correspondente a região ativa, e isto independentemente da escolha do número de pontos n da região ativa que no caso é igual a 21. Além disso, forçamos a amostragem do sinal de vídeo ser feita em intervalos¹ correspondentes com a divisão do plano de ação.

x_2



21 Região Ativa

Fig,3.5 - DISCRETIZAÇÃO DO PLANO DE AÇÃO.

Com esta representação do plano de ação sob a forma de uma matriz, impomos a primeira restrição ao problema. O deslocamento do objeto sobre o plano de ação será discreto num movimento de translação correspondendo a uma separação entre linhas verticais \rightarrow u horizontais e a rotação em torno do baricentro de grau em grau, com isto limitaremos o número de posições, como a peça deverá cair sobre o plano, a um conjunto finito, em consequência também teremos para um único baricentro um número finito de posições, isto devido a rotação. Naturalmente sobre este conjunto discreto,

existirá uma distribuição de probabilidade discreta.

As coordenadas do baricentro do objeto sobre o plano , terá como referência o ponto central do plano de ação, por onde ^x passam os eixos e / e cada divisão entre linhas representa ¹ uma unidade de comprimento.

A partir deste ponto nós poderíamos dar continuidade ¹ com o tratamento matemático necessário, no entanto, perceberemos ¹ que mesmo trabalhando com conjuntos discretos e finitos a quantidade de pontos ainda é muito grande e exigiria na construção das matrizes de correlação e autocorrelação relacionado com o problema ¹ de estimação uma área de memória relativamente grande e um enorme* esforço computacional. Este problema poderá ser contornado impondo outra restrição, que por sua vez também facilitará na construção ¹ do algoritmo. Tal restrição está relacionada com a rotação do objeto em torno do baricentro, ou seja, não será permitido rotacionar o objeto, após uma posição pré-estabelecida. Além disso forçamos que o objeto esteja contido inteiramente dentro de uma área correspondente a região ativa. *

Quando nos referimos a uma posição pré-estabelecida que ríamos dizer que na construção do algoritmo, o nosso sistema computacional contém todos os pontos da figura numa posição determinada, como consequência a colocação da figura sobre o plano da ação só poderá ser naquela posição pré-estabelecida, veja fig.3.6. Isto * acarretará na impossibilidade de se rotacionar a figura permitindo apenas que haja deslocamento no sentido vertical ou horizontal.

É importante ainda frisar que dentro dos recursos computacionais disponíveis (área de memória) teremos que limitar o **numero** de linhas e colunas do plano de ação, isto nos permite apresentar alguns resultados mesmo trabalhando com nossas restrições com

Alocação no arquivo
aos pontos amostrados
do objeto

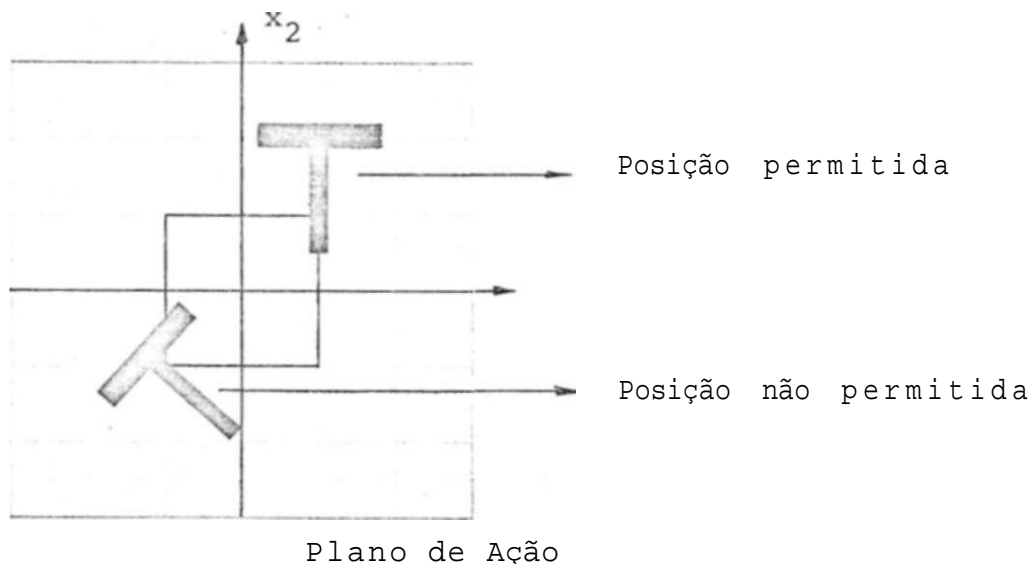


Fig.3.6. - INDICAÇÃO DAS POSIÇÕES PERMITIDAS E NÃO PERMITIDAS.

putacionais. Este limite de linhas e colunas não tira a validade do algoritmo para outros casos, podendo estendi-lo de conformidade, com os recursos disponíveis.

Diante dessas limitações, faz-se necessário introduzir no mecanismo do autômato, um outro mecanismo de ajuste da peça, ou objeto, as posições permitidas, ou seja, imaginemos que em um arquivo a peça é colocada conforme a figura 3.7a. Naturalmente a peça não poderia seguir diretamente para a área de visão da câmera como colocado ao lado direito das palhetas de ajuste, pois além de não se ter mais ideia do contorno, devido ao número limitado de linhas e colunas do plano de ação, essa posição não foi considerada na determinação das matrizes, tornando necessário a colocação da peça para uma posição permitida conforme mostra a figura 3.7b.

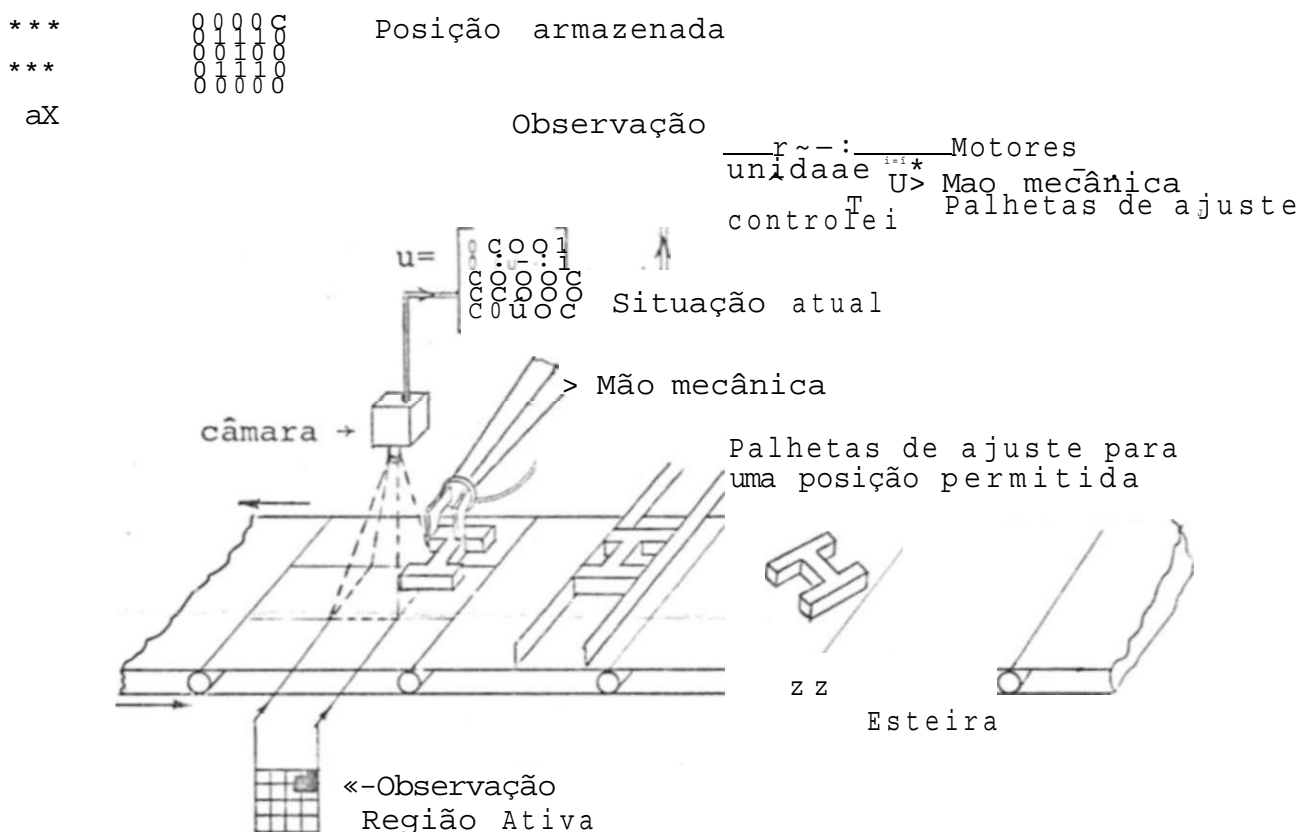


Fig.3.7. - REPRESENTAÇÃO DO EXPERIMENTO SUJEITO A RESTRIÇÕES.

Observe que com n ponto por linha ou coluna na região ativa com n ímpar, o plano de ação é formado por um conjunto¹ de pontos, aonde o número de elementos deste conjunto é dado por

$$T = \frac{(3n-2)}{2}$$

o conjunto t_i de posição possíveis é finito e a probabilidade de ocorrência de um evento $\{u\}$ será dada por:

$$P(\{u\}) = 1/k$$

onde k representa o número de elementos do conjunto t_i dado por:

$$k = (4n - 4n + 1).$$

3.2.- Formalização Matemática

3.2.1. - Definição dos Vetores Aleatórios

Para introduzirmos o resultado da estimação linear precisamos do conceito de variáveis aleatórias, no caso vetores aleatórios definidos em nosso problema.

Observamos que as coordenadas do baricentro do objeto, numa base ligada ao plano de ação são funções da posição do objeto, daí podemos definir o vetor aleatório $X = (X^1, X^2)$, aonde X^1 e X^2 são duas variáveis aleatórias cujas realizações $X^1(t_0)$ e $X^2(t_0)$ representam a abscissa e ordenada do baricentro do objeto quando o mesmo se encontra na posição u .

Consideremos agora um vetor Y , designado como vetor observação.

Do resultado da observação da câmera, obtemos uma matriz de pontes binários, u de dimensão $n \times n$ para uma posição particular w e t . Seja U a matriz aleatória binária cuja realização $U(w)$ é a matriz u .

Dessa observação formamos um vetor $Y = (Y^1, Y^2, \dots, Y^m)$ cujas as m componentes Y^i são funções de matriz aleatória U , ou seja, $Y^i = f_i(U)$ donde os f_i são funções de $\{0, 1\}^{n^2}$ em \mathbb{R} , em que $\{0, 1\}^{n^2}$ designa o espaço das matrizes binárias de dimensão $n \times n$.

3.2.2. - O Estimador Linear dos Mínimos Quadrados

Neste ponto estamos em condições de aplicar os resultados obtidos no desenvolvimento de estimação linear extensivo as variáveis aleatórias em \mathbb{R}^n .

A colocação aleatória do objeto sobre o plano de ação ω na posição ω faz o vetor aleatório $X = (X^1, \dots, X^k)$ assumir o valor (x_n/X) . A observação de câmara nos dá como resultado uma matriz u que está associada a uma matriz aleatória U , e através das funções de transformação f , associamos ao vetor aleatório Y o vetor (y^1, \dots, y^m) . Podemos perceber apenas os valores de Y são acessíveis e daí tentaremos deduzir os valores de X . Para este propósito, isto é, deduzir X pelo vetor observação Y usaremos a definição explícita do estimador linear, isto é,

$$X = EY'(EYY')^{-1}Y \quad (\text{com probabilidade } 1).$$

Com este resultado o problema está praticamente resolvido, desde que possamos determinar as raízes de correlação cruzada EY' e a matriz de auto-correlação EYY' , sendo necessário que EYY' admite inversa

Das hipóteses feitas anteriormente sobre o espaço de probabilidade, as expressões para os momentos são dados por:

$$EY' = E \int X(\omega) Y'(a) P\{u\} = 1/k \int X^M Y'(\omega)$$

e

$$EYY' = E \int Y(u) Y'(\omega) P\{U\} = 1/k \int Y(w) Y'(\omega)$$

Um detalhe que podemos observar, é que devido a distribuição de probabilidade uniforme, isto é, igual para todo ω , podemos colocar em evidência a probabilidade de ocorrência do evento que em consequência representa uma diminuição do esforço computacional.

Em algumas aplicações é mais sensato usarmos o estimador linear dos mínimos quadrados considerando os valores médio das

grandezas observadas, desde que a matriz de covariância seja não singular, isto porque a média das grandezas envolvidas é mais uma informação, podendo representar um melhor resultado na estimação. Neste caso a expressão para o estimador será dada por:

$$\hat{E}(Y/Y, Y) = X + E^E (Y-Y) \text{ com probabilidade um}$$

Aonde:

$$X = EX$$

$$Z_{xy} = E(X-X) (Y-Y)^1$$

$$Z_{yy}' = E (Y-Y) (Y-Y)^1$$

Além de fornecer esta vantagem o emprego do estimador¹ considerando a média, facilita do ponto de vista computacional o cálculo do erro de estimação dado por traço *

Agora, neste ponto, surge o problema mais significativo relacionado com a estimação, que se refere quanto a escolha do vetor observação, isto é, que classe de funções "f" devemos escolher, tal que com um subconjunto dessa classe o menor possível, o erro de estimação esteja dentro de limites especificado no problema. Em outras palavras, estamos interessados nas funções que em média dê como resultado da estimação o valor mais próximo possível¹ da grandeza estimada permitindo que a mão mecânica possa pegar a¹ peça no plano de ação.

Para termos uma idéia da gravidade do problema, vejamos o seguinte exemplo. Seja U. a variável aleatória binária que representa o i-ésimo elemento da matriz U. Seja \bar{u}' o conjunto das posições tais que:

$$\sum_{i=1}^n u_i (w) \neq 0$$

maneira mais rápida possível usando o mínimo de recursos computacionais, implicando num menor custo de operação.

Evidentemente, em outros setores de uma indústria, por exemplo numa linha de montagem podemos utilizar autômatos. Os sistemas de controle das diversas máquinas podem ser independentes, um para cada autômato, ou apenas uma unidade central de controle responsável pelo comando desses autômatos. A estação central de controle poderá se situar a uma certa distância das instalações dos autômatos, sendo então necessário algum meio de comunicação através, do qual as informações são transmitidas.

A medida que os sinais são transmitidos por este meio ou canal mais frequentemente chamado, podem sofrer distorções devido a presença de ruídos e interferências que serão somados ao sinal. O canal estabelecido entre a unidade central de controle e as instalações aonde se encontram os autômatos podem ser por cabos, fios telefônicos ou o próprio espaço para a transmissão de sinais de rádio.

No parágrafo seguinte introduziremos ruído no canal destinado a transmissão de informações e estudaremos o problema da estimação com os mesmos critérios adotados anteriormente.

3.3. - Perturbação no Canal de Transmissão

A partir de agora, consideraremos que os sinais são transmitidos por um meio ruidoso). Na qual a mensagem é transmitida sob a forma de dados digitais, tendo em vista que esta maneira de transmissão de sinais, já aparece na forma digital, como os dados de um computador.

A figura 3.8 mostra basicamente o sistema usado na comunicação de um autômato e a unidade central de controle.

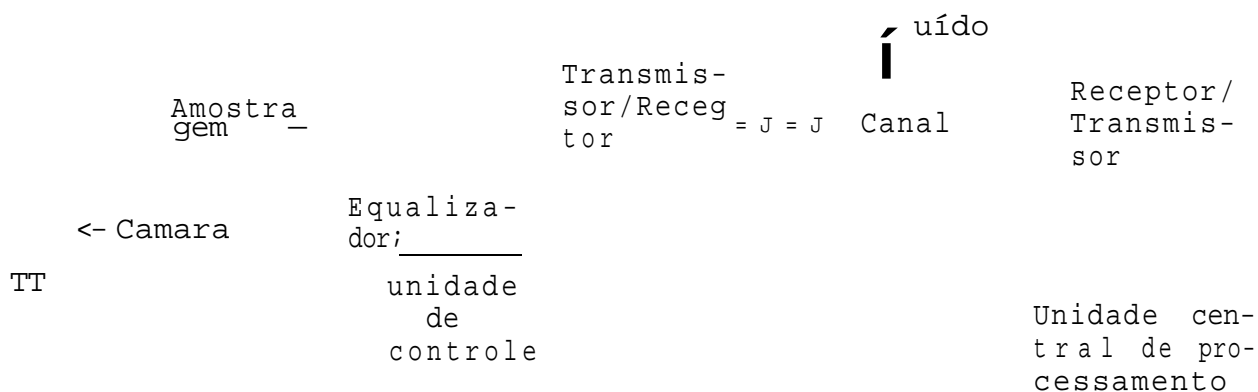
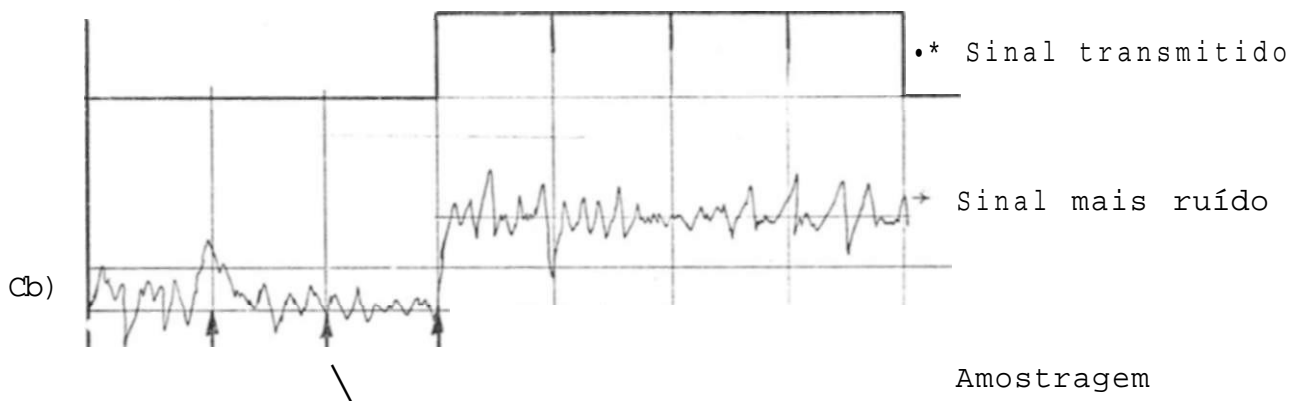


Fig.3.8. - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA BÁSICO NA COMUNICAÇÃO.

O sinal do vídeo é transmitido sob a forma digital, que leva informações da ausência ou presença do objeto em uma dada região do plano de ação.

O efeito do ruído sobre o sinal transmitido é como mostra a figura 3.9.



(c:

Reprodução da mensagem

Fig.3.9. - INFLUÊNCIA DO RUÍDO SOBRE O SINAL TRANSMITIDO

Observando a figura, a perturbação no canal introduz ruído somando-se ao sinal, se for de magnitude comparada com o sinal, tende a mascarar este sinal. Finalmente a reprodução da imagem original se faz mediante a amostragem e uma tomada de decisão sobre a amostra, decidindo se foi enviado um "zero" ou um "um". Como podemos perceber houve equívocos na decisão, pois o ruído mascarou completamente o símbolo correto. Estes equívocos na decisão trará como consequência erros na predição da posição do baricentro, e daí nós através de simulação procuraremos investigar o desempenho do estimador linear, levando em consideração a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído, ou seja, tentaremos averiguar se sob as condições mais simples, é possível colocar em operação o mecanismo destinado a pegar a peça sobre o plano.

Em virtude do que foi dito, imaginemos que a matriz U resultantes da observação, é transmitida através do canal ruidoso por linhas horizontais consecutivas e reconstruída na recepção afim de que possamos formar o vetor observação usado na estimação. A idéia é mostrada basicamente na figura 3.10.

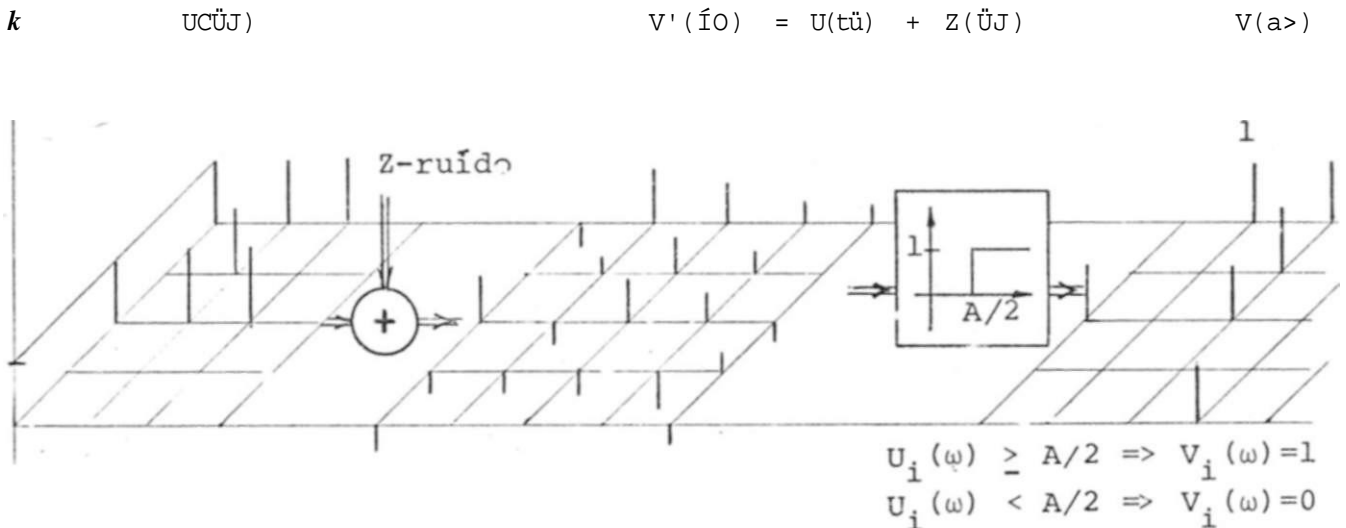


Fig.3.10 - TRANSMISSÃO DA MATRIZ OBSERVADA ATRAVÉS DE UM CANAL RUIDOSO.

Aonde supomos que a matriz $U(c_0)$ é transmitida de uma só vez pelo canal, donde cada ponto indicado na malha é atacado por ruído aditivo em consequência teremos na saída do canal uma matriz de pontos $V(c_0) = U(c_0) + Z(i_0)$, que no caso é fortemente atacada pelo ruído. O critério de decisão na reconstrução da matriz é particularmente simples, pois considera como 1 as tensões maiores que $A/2$ volts e zero as tensões menores que $A/2$ volts. Evidentemente neste ponto surge a seguinte questão: que tipo de ruído será considerado no problema? Nos admitiremos que o ruído seja Gaussiano de média nula, $EZ_c) = 0$. Isto significa dizer que se amostrarmos o ruído em um instante de tempo t , a função de densidade de probabilidade dessa variável aleatória será da forma.

$$f_z(z) = \frac{e^{-z^2/a}}{\sqrt{2\pi} a}$$

Esse modelo estatístico para o ruído parece ser intuitivamente bom, pois indica que o ruído ocorre com mais frequência para valores pequenos, tem a mesma probabilidade de ser positivo ou negativo e além disso a probabilidade decresce rapidamente, a medida que em nóculo ou seu valor aumenta.

Outro detalhe é q*ianto ao nível de tensão em que a decisão é tomada. Por que $A/2$ e não outro valor? De fato a decisão está baseada apenas nas amplitudes das amostras do sinal de vídeo, transmitidos por linhas horizontais, mais o ruído, logo é natural que devemos escolher um nível de tensão "ótimo" para tomar a decisão. A maneira de se fazer isto é pelo ajuste da probabilidade de erro P . Da figura 3.11.

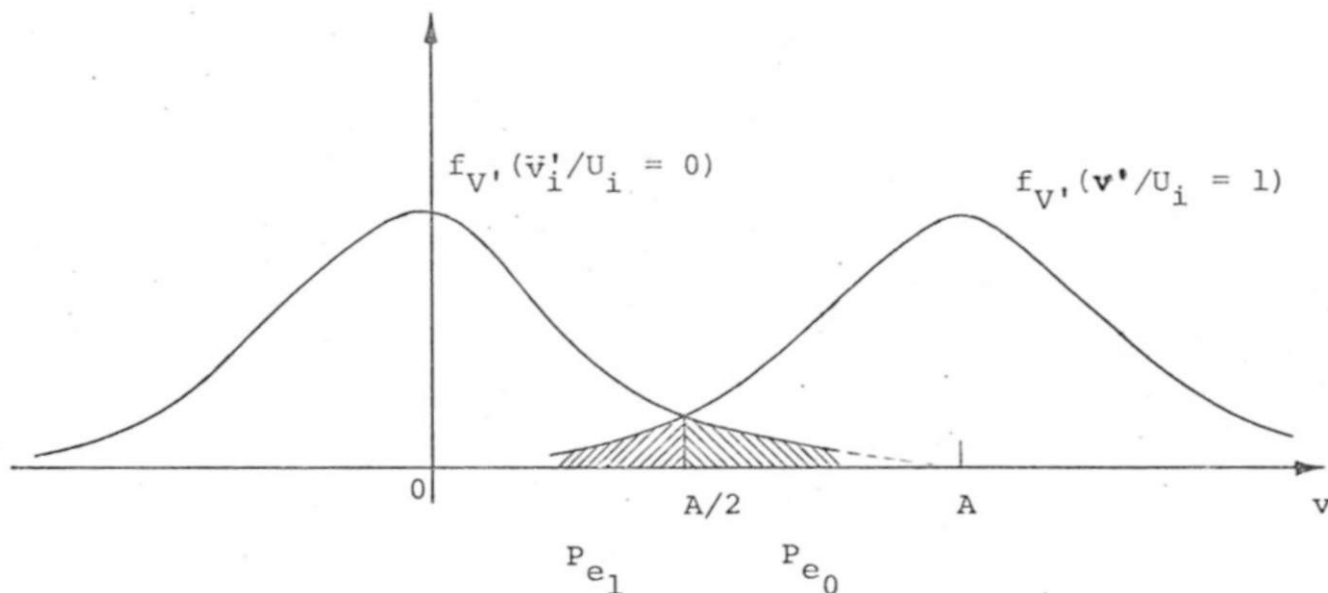


Fig.3.11. - DENSIDADES DE PROBABILIDADES GAUSSIANA CENTRADAS EM 0 e A.

Verificamos que a probabilidade total de erro do sistema é dado por:

$$P_e = P_o P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

onde P_o e P_1 são as probabilidades a priori da ocorrência de um zero e de um 1 respectivamente.

A melhor escolha para um nível de decisão "d" é aquele que minimize a probabilidade de erro do sistema, e o resultado para este valor ótimo é dado por:

$$d = \frac{A}{2} + \frac{Z_{\alpha} \sqrt{2}}{P_x}$$

onde podemos perceber da equação que este valor ótimo depende das probabilidades a priori da ocorrência de zeros e de uns.

O nível escolhido em $A/2$ aparentemente não seria sen-

tido, mas a parcela responsável pelo deslocamento desse nível, ou seja, $\sigma^2 / A Z_n^2$, é uma quantidade pequena mesmo em condições extremas, tal como $P_0 = 3/4$ e $\sigma^2 = 1/4$, desde que a relação sinal ruído na comunicação seja confiável por exemplo $A/a = 5$.

A suposição do ruído gaussiano além de estar apropriado ao problema em questão, tem sua importância quando nos referimos ao problema da amostragem. Pois, de fato se considerarmos o ruído atacando independentemente cada amostra, isto acarretará numa simplicidade quanto ao desenvolvimento do algoritmo de estimação. Agora o problema é contornar esta situação, isto é, com o modelo estatístico de ruído no problema qual a condição que nos garante esta independência.

Se examinarmos a onda de ruído verificamos que, a medida que o instante tomado para a amostra em t_j se aproxima do instante t^* a variável aleatória $z(t_j)$, torna-se mais próxima de $z(t^*)$ intuitivamente podemos sentir uma dependência entre estas variáveis aleatórias, isto é, $z(t_j)$ começa a ser previsível por $z(t_{j+1})$. No entanto, se as amostras forem tomadas em intervalos de tempo ΔT maior que $1/B$, donde B representa a largura de banda do ruído isto nos garante essencialmente a não correlação entre as amostras e como o modelo de ruído é gaussiano o nosso problema estaria praticamente resolvido, pois duas variáveis aleatórias gaussianas não correlacionadas são independentes.

Por outro lado, na prática a largura de banda do ruído é relativamente grande e o ruído aparecerá como sendo branco, pois as frequências mais significativas do sistema é bem inferior que a largura de banda do ruído. Daí nós poderemos modelar o ruído como sendo branco. Isto significa dizer que a densidade espectral de potência $G_z(f)$ é constante, digamos igual a $\sigma^2/2$ sobre todas as frequências. Como consequência dessa suposição a função de

autocorrelação é um impulso não origem. Logo as amostras tomadas são sempre não correlacionadas por menor que seja o intervalo de tempo entre elas. Finalmente supondo um ruído gaussiano branco garantimos a independência entre as amostras do ruído.

Agora retornaremos ao problema de estimação da posição do baricentro, considerando a presença do ruído. Isto é dado que observamos Y , cujas componentes agora são funções da matriz aleatória V e não de U desejamos deduzir o vetor aleatório $X(\omega)$ através do estimador linear dos mínimos quadrados extensivo as variáveis aleatórias em R .

Inicialmente vamos considerar o emprego da expressão explícita para o estimador sem considerar o valor médio, ou seja/

$$X = \frac{EY Y'}{EY Y'}$$

afim de fazermos alguns comentários sobre as componentes do vetor observação, e posteriormente estender o algoritmo, levando em consideração o valor médio das grandezas definidas no problema.

Imaginemos o nosso vetor observação constituído apenas

por duas componentes Y^1 e Y^2 na qual são transformações lineares da matriz $V(\omega)$, por exemplo representando as coordenadas do baricentro da figura formada na matriz $V(OJ)$.

Definido o vetor resta agora determinar as matrizes de autocorrelação e correlação cruzada, $EY Y'$ e $EY^1 Y^2$. Para a construção da matriz $EY Y'$, temos que calcular cada elemento da matriz, ou seja, os valores $EY^i Y^j$, pois:

$$EY Y' = E \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \\ Y^1 & Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \\ Y^1 & Y^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} EY^1 Y^1 & EY^1 Y^2 \\ EY^2 Y^1 & EY^2 Y^2 \end{pmatrix}$$

por definição sabemos que:

$$EX.Y^* = Z \quad S \quad X \quad Y^* \quad p_j^* X. = X \quad , \quad Y^* = y^* , | / i , j$$

Para cada ω e Q existirá um valor de x_k^* entretanto a quantidade de valores assumido por Y . dependerá da dimensão da matriz V correspondente a região ativa, isto é, para uma matriz de dimensão n , existirá uma quantidade L de possíveis resultados dado por:

$$L = \sum_{k=0}^{n^2} C_{n^2}^k = 2^{n^2}$$

que por sua vez representa a quantidade de possíveis figuras formadas por esta matriz.

Naturalmente, a cada objeto formado teremos um par de números representando o baricentro podendo haver ou não coincidência entre algumas abscissa ou ordenadas para objetos em posições distintas. Logo, além de calcular as coordenadas do baricentro para os possíveis objetos formados precisamos também de calcular a probabilidade conjunta de ocorrência de X . e Y . e isto para todo i, j . Pelo que parece o algoritmo de estimação levando em conta vetores observação desse tipo, torna-se mais complicado, e o esforço computacional solicitado a máquina no cálculo das matrizes, não se justifica a nossa aplicação. Portanto, desde que estamos empenhado na construção de um algoritmo simples, inevitavelmente desprezamos a idéia de usarmos funções não lineares da matriz $V(cu)$. Neste caso o que nos resta a fazer é tomar como vetor observação, a própria matriz $V(co)$ ou pontos dessa matriz.

Sendo o ruído do tipo gaussiano branco, e o vetor observação os próprios elementos da matriz $V(L0)$ basta estabelecer as equações destinados ao cálculo das matrizes de correlação e auto -

correlação. Em vez de nos limitarmos ao cálculo dessas matrizes, estenderemos o problema de estimação considerando a média das grandezas, isto é, usaremos o seguinte resultado

$$X = X + \frac{Z_{XV}}{\sqrt{V}} \frac{z}{\sqrt{V}} (V-v) \text{ com probabilidade um.}$$

Pois é um caso mais geral.

Finalmente apresentaremos a forma computacional das equações destinada ao cálculo das diversas grandezas da expressão anterior.

O valor médio da grandeza a ser estimada, corresponde exatamente as coordenadas do baricentro do objeto, com relação aos eixos de referência. Quando o objeto está no centro do plano de ação. Representadas por X_{gA} e Y_{gA} ou seja:

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ *2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_{BA} \\ v_{BA} \end{vmatrix}$$

Os elementos da matriz de covariância $\hat{\sigma}_{xv}^2$ são calculados separadamente pelas seguintes expressões:

$$EX.V! = \frac{r}{k} \sum_{i=1}^k X_i(o) \{CK + (I-2CK)P[Z > A/2]\}$$

aonde:

$$CK = \begin{cases} \text{se } U_D(a) = 1 \\ \text{se } U_3(w) = 0 \end{cases}$$

para todo $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \dots, m$.

$$EV_j = \{ n+P [Z > A/2] (k-2n) \} / k \quad j = 1, \dots, m.$$

Aonde n representa a quantidade de pontos de massa unitária que formou o objeto.

Note-se que $E_{i,j} = E (X_i - X_j) (V_i - V_j) = EX_i V_j - X_j V_i$.

Os elementos da matriz de autocovariância $\hat{\Sigma}_{VV}$ são calculados com o auxílio da seguinte expressão:

$$E_{i,j} = \frac{1}{k} \left\{ [z U_i(\cdot)] \ddot{u}_i(\cdot) ! q^2 + Z U_i(w) U_i(CJ) Dq + \right. \\ \left. + Z U_i(t_0) U_i(w) \sum_{j=1}^J x_{pq} + Z U_i^u U_i(a) \sum_{j=1}^J p \right\} \\ \text{Í * j}$$

aonde:

$$p = P [z > A/2] \text{ e } q = 1-p$$

\ddot{u}_i representa o complementar binário do i -ésimo ponto da matriz $U(w)$.

Se $i = j$, então; $E V_i^2 = E V_i$. $i = 1, \dots, m$.

Todas estas equações serão demonstradas no Apêndice B.

CAPÍTULO - 4

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

4 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Apresentaremos neste capítulo os resultados obtidos na simulação. Inicialmente faremos alguns comentários com relação a observação, ou seja, o que se pode observar da matriz resultante do experimento. Introduziremos várias funções dessa matriz para compor o vetor observação e dentro dessas funções escolhidas a priori, classificaremos por simulação aquelas que dão os melhores resultados quanto ao erro de estimação. Mostraremos alguns exemplos, tudo isto não considerando o valor médio das grandezas observadas. Em seguida comentaremos sobre os exemplos, quando aplicamos o estimador linear, dado que a média das grandezas são levadas em consideração, e finalmente apresentaremos o resultado da simulação abordando o problema com ruído.

4.1. - O Vetor Observação

Do capítulo anterior, verificamos que o resultado do experimento é uma matriz binária U constituída de zeros e uns. O que se faz necessário é justamente a definição das componentes do vetor observação funções dessa matriz, isto é, escolher cada componente do vetor observação. As componentes desse vetor podem ser os próprios elementos da matriz, transformando a matriz observada

num vetor de dimensão n , onde n é o número de linhas ou colunas de região ativa, ou outro vetor cuja dimensão seja menor que n ,

representando uma transformação linear da matriz U , expressa matematicamente da seguinte forma:

$$f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$$

$$U \quad f(U) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) \text{ com } m < n$$

donde cada componente e um elemento da matriz U.

Outra maneira de definir é através de transformações não lineares que associa a matriz um número real.

Quanto as transformações lineares, podemos perceber, de imediato, alguns inconvenientes, pois sendo a matriz U, binária corremos um maior risco de obter uma matriz de autocorrelação EYY' singular. Por outro lado, a quantidade de componentes constituindo o vetor observação não pode ser pequena, isto porque para muitas observações o vetor assumirá o valor zero, mesmo que a intersecção do objeto com a região ativa seja não vazia.

As transformações não lineares, diminui o risco de singularidade e a quantidade de componentes poder ser muito menor que n^2 .

Devido as limitações computacionais não é possível usar as funções lineares de U como componentes do vetor observação, sendo inevitável o problema de singularidade. Neste caso, nosso vetor observação será formado por funções não lineares de U.

O resultado da simulação mostrou que do conjunto das funções escolhidas heurísticamente, os que apresentam os melhores resultados, para diversos objetos, foram as sequências abaixo:

$$Y_{2j-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{U_i^{2j-1}}{U_i} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

sobre \hat{I}^i , tal que $f_u \neq 0$

onde X^i e X^d são as coordenadas do i-ésimo ponto da região ativa.

Observe que o resultado da estimação com essas componen

tes apresentam o menor erro de estimação entre aquelas funções escolhidas a priori, entretanto não é possível garantir que representam as melhores escolhas.

As figuras 4.11 a 4.12 mostram alguns exemplos da estimação quando não consideramos o valor médio das grandezas envolvidas no problema. Para todos estes casos usamos para as primeiras oito funções das sequências anteriores as restantes funções das mesmas sequências multiplicadas por um valor constante por razões numéricas, ou seja:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_2 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_3 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_4 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_5 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_6 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_7 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_8 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_9 &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i \\
 Y_{10} &= \sum_{i=1}^n U_i X^{(i)} / \sum_{i=1}^n U_i
 \end{aligned}$$

É importante notar que as duas primeiras funções representam o baricentro da figura formada em U . Qualquer função combinada com estas duas apresentam melhores resultado que qualquer outra combinação.

Aumentar as componentes do vetor estimação sempre dá um melhor resultado com relação ao erro médio quadrado. É conveniente notar na fig.4.1.1 que o mesmo não ocorre com figura de dupla simetria com relação aos erros, o erro de estimação permanece o mesmo para as componentes de índice par. A combinação dessas componentes com as outras de índice ímpares também não acrescentam nenhuma informação sobre a posição do baricentro. Quando a figura não é simétrica tanto com relação a apenas um eixo, quanto aos dois eixos, verificamos que as componentes de índices pares já não se tornam mais irrelevantes, sendo mais significativas que os de índices ímpares, quando combinados com Y^- e Y^+ , a medida que o baricentro se afasta mais da origem com relação aos eixos X e Y , veja as 4.12, 4.13 e 4.14.

Nestas figuras também são mostrados exemplos do resultado da estimação para um \bar{U} particular, usando apenas as componentes mais significativas Y_1 e Y_2 . Observe que são feitas duas observações, sendo que a segunda observação toma como base as coordenadas da primeira estimação, deslocando a câmara para uma posição permitida dentro do plano de ação e daí fazemos uma segunda estimação.

4.2. - Estimação Considerando o Valor Médio

As figuras 4.21, 4.22, 4.23 e 4.24, mostram o resultado da estimação para um U particular quando o vetor observação é formado pelas componentes Y_1 e Y_2 , e o erro médio quadrado para

as componentes $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_N$ $Q^{uanc} \wedge o^a$ fig. 4.21, percebemos que o erro médio quadrado coincide com aqueles da fig. 4.11, indicando que o conhecimento da média não trás nenhuma informação neste caso. Quanto as figuras não simétricas, a média não mais representa uma quantidade irrelevante.

Do ponto de vista de aplicação, o conhecimento da média na maioria das figuras, dá como resultado valores próximo aqueles quando a média não é considerada, portanto é mais viável não considerar a média no desenvolvimento do algoritmo, isto acarreta um menor esforço computacional.

4.3. - O Ruído

Quando consideramos a presença do ruído no canal de transmissão, o algoritmo de estimação considera a média das grandezas envolvidas no problema, e além disso o vetor observação é formado por funções lineares da matrizes U .

As figuras 4.31 a 4.34 mostram os gráficos da relação sinal ruído em dB versus o erro da estimação dado pelo traço E_{\sim} , para os vetores observação de dimensão 9, 17, 29 e 37. Nestes exemplos o número de linhas ou colunas da região ativa é igual a nove.

As componentes são escolhidas de tal maneira a permitir que se tenha uma melhor distribuição sobre os pontos observados na região ativa conforme mostra a figura 4.31.

Os resultados indicam que o aumento da relação sinal ruído acima de 6dB não acarreta um melhor desempenho da estimação para um mesmo vetor observação, isto é, o erro permanece quase o mesmo, embora, acrescentar componentes ao vetor observação nos dê um melhor resultado para o erro médio quadrado.

O nosso vetor observação seria constituído de no máximo

81 componentes,mas, devido as limitações dos recursos computacionais só foi possível realizar a estimação com 37 componentes. Observe que a partir de seis dB com esse número de componentes, para estas figuras, houve problema de singularidade da matriz de covariância Z_{YY} .

Aparentemente se o vetor observação fosse constituído de todos os elementos do resultado da observação, poder-se-ia imaginar que o erro de estimação seria o menor possível, tal resultado é impossível de ser obtido, pois a medida que a relação sinal/ruído aumenta, diminui a possibilidade de ocorrência de erro, particularmente um zero poderá passar a ser um "um" na decisão, como consequência a matriz de covariância $\hat{y}y$ será singular.

As figuras 4.36a e 4.37a são exemplos do resultado da estimação para um \tilde{u} particular, com os componentes Y^i mostrando também o erro médio quadrado com diversas componentes para o vetor observação, quando a média não é levada em consideração, em b a média é considerada.

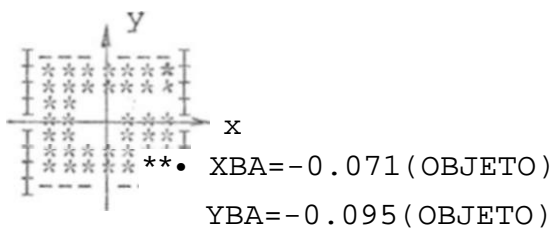
O número de linhas e colunas da região ativa para estas figuras são reduzidas a 7 linhas ou colunas.

Tal redução permitiu que o vetor observação fosse constituído por todos os elementos da matriz resultante da observação. Além disso das figuras 4.38 e 4.39 podemos perceber que é inevitável o problema de singularidade da matriz de covariância $\hat{y}y$.

A figura 4.39 mostra quais são as componentes usadas na estimação.

Objeto	1- Observação	VALORES ESTIMADOS
*** ** XBA = 0.000 (OBJETO)	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
* k k l; k k	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
k k k YBA = 0.000 (03JET0)	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
• k k z k	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	XCH1 = -6 .367
	0 0 0 0 0 0 0 0 0 c	XCH2 = -6 .194
	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
Plano p/ação	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
	3 _____	
	2- Observação	
	0 0 0 0 ũ 0 0 0 0 0	
	1 1 1 1 1 1 1 0 0	
	1 1 1 1 1 1 1 0 0	XCH1 = -7 .592
	0 0 1 1 0 0 0 0 0	XCH2 = -6 .000
kkkkkV * kkk	0 0 1 1 0 c 0 0	
k k k	0 0 1 1 1 0 0 0 0	
k k k	1 1 1 1 1 1 1 0 0	
kk k k kkk	1 1 1 1 1 1 1 0 u	
kkkkkk	0 0 0 0 0 0 c 0 0	
Coordenadas do baricentro sobre o plano (\hat{x}^2)		
$x_2 = -7.000$, $x_{\sim} = -6.000$		
2		
- COMPONENTES		
$Y_1 \times Y_2$	19.4074	
$Y_1 \times Y_5 \times Y_6$	19.2195	
$Y_1 \times Y_2 \times Y_5 \times Y_6$ $Y_9 \times Y_{10}$	19.1168	
$Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times Y_4$	19.4074	
$Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times Y_4 \times Y_6$	19.2195	
$Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \times Y_4 \times Y_6 \times Y_7 \times Y_8 \times Y_{10}$	19.1168	
$Y_3 \times Y_4$	48.0000	
$Y_3 \times Y_4 \times Y_7$;	48.0000	
$Y_3 \times Y_4 \times Y_7$; 11 *12	48.0000	

Fig.4.11 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM VETOR $y=(y_1/y_2)$ /NAO CONSIDERANDO O VALOR MÉDIO DAS GRANDEZAS. ERRO MÉDIO QUADRADO PARA DIVERSOS VETORES OBSERVAÇÃO.



1- Observação

VALOFES ESTIMADOS
 000000011
 000000011
 000000000
 000000000
 000000000 XCH1 = 5.821
 000000000 XCH2 = 5.911
 000000000
 000000000
 000000000

x.



2- Observação

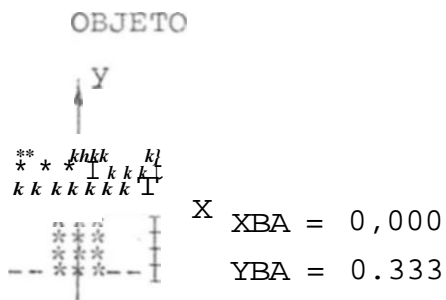
001111111
 001111111
 001100000 XCH1 7.473
 001101111 XCK2 7.433
 001111111
 001111111
 000000000
 000000000

Coordenadas do baricentro sobre o plano (x^1/x_2)

$x_1 = 5.929$ $x_2 = 5.905$

COMPONENTES	ERRO MÉDIO QUADRADO
y_i^2	19.1433
$y_i^2 \cdot y_5 \cdot y_6$	19.1328
$y_i^2 \cdot y_5 \cdot y_6 \cdot y_9 \cdot 10$	19.1260
$y_i^2 \cdot y_3 \cdot y_4$	19.1391
$y_i^2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 \cdot y_6$	19.1287
$y_i^2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 \cdot y_6 \cdot y_7 \cdot y_8 \cdot y_9 \cdot 10$	19.1183
$y_3 \cdot y_4$	47.9931
$y_3 \cdot y_4 \cdot y_7 \cdot y_8$	47.9814
$y_3 \cdot y_4 \cdot y_7 \cdot y_8 \cdot y_{11} \cdot 12$	47.9723

Fig.4.12 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM O VETOR $y = (y, \#y_s)$, NÃO CONSIDERANDO O VALOR MÉDIO DAS GRANDEZAS. ERRO MÉDIO QUADRADO PARA DIVERSOS VETORES OBSERVAÇÃO.



1- Observação

	VALORES ESTIMADOS
111100000	
113100000	
111100000	
110000000	
110000000	XCH1 = -4.308
110000000	XCH2 = 1.981
110000000	
110000000	
110000000	
000000000	

PLANO P/AÇÃO

x.



000000000		
000000000		
011111110		
011111110	XCH1	-4.000
011111110	XCH2	1.876
000111000		
000111000		
000111000		
000111000		
000111000		
000111000		

Coordenadas do baricentro sobre o plano (x^/X^

$$x_1 = -4.000$$

$$x_2 = 1.333$$

COMPONENTES	ERRO MÉDIO QUADRADO
1 2	21.8134
1 2 5 6	21.7012
1 2 5 6 10	21.6983
1 2 3 4	21.6101
1 2 3 4 5	21.4978
1 2 3 4 7 8 9 10	21.4769
3 4	47.9421
3 4 V? 8	47.8023
3 4 7 8 11 12	47.8893

Fig.4.13 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM VETOR $y = (YT/YO)^{N \times O \times N}$ SIDERANDO VALOR MÉDIO. ERRO MÉDIO QUADRADO PARA DIVER - SOS VETORES OBSERVAÇÃO.

1- Observação

VALORES ESTIMADOS

* : ; c
 * * *
 "lÍff XBA = 0.811 (OBJETO)
 YBA = 0.324 (OBJETO)

000000011
 000000011
 000000000 XCH1 = 4.6 32
 000000000 XCH2 = 5.117
 000000000
 000000000
 000000000
 000000000
 000000000

PLANO P/AÇÃO

it ;
 * * * *
 fe * * * *
 * * * *
 /- A
 * * k *
 4 _ _ * * *
 * * k

2- Observação

111111000
 111111000
 001111000 XCH1 3.379
 000111000 XCH2 8.159
 000111000
 000111000
 000111000
 000000000
 000000000

Coordenadas do baricentro sobre o plano (x, x^{\wedge})

$x_1 = 2.811$ $x_2 = 1.324$

COMPONENTES	ERRO MÉDIO QUADRADO
y_1	21.7055
y_2	21.6416
y_3	21.6413
y_4	21.6031
y_5	21.5358
y_6	21.5307
y_7	48.4495
y_8	48.3777
y_9	48.3746
y_{10}	

Fig.4.14 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM VETOR $y = (y_1, y_2, \dots, y_{10})^T$ ERRO MÉDIO QUADRADO PARA DIVERSOS VETORES OBSERVAÇÃO. NÃO CONSIDERANDO VALOR MÉDIO.

PLANO P/AÇÃO

1- Observação
 VALORES ESTIMADOS
 000000000
 000000000
 000000000
 000000000 XCH1 = -6.367
 000000000 XCH2 = -6.194
 000000000
 100000000
 100000000

AAAA
 *AAAAA
 A
 AA
 AAA
 AAAA
 AAAAA
 AAAAA

2ª Observação
 000000000
 111111100
 111111100 XCH1 -7.592
 001110000
 001110000 XCH2 -6.000
 001110000
 111111100
 111111100
00000000

COMPONENTES

ERRO MÉDIO QUADRADO

$Y_n \cdot Y$

19.4074

\wedge^3

48.0000

Fig.4.21 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM AS COMPONENTES $Y = (y_1, y_2)$
 RESULTADO DO ERRO MÉDIO COM OS VETORES $(Y_1, Y_2) / (Y_3, Y_4)$.
 CONSIDERANDO O VALOR MÉDIO DO VETOR OBSERVAÇÃO.

PLANO P/AÇÃO

i x.

AAAAAA
 AAAAAA
 AAAAAA
 AAAAA
 AA
 AAA
 AAA

1- Observação
 VALORES ESTIMADOS
 111100000
 111100000 XCH1 = -4.308
 111100000 XCH2 = 2.312
 110000000
 110000000
 110000000
 110000000
 110000000
 110000000
 110000000
 000000000

2- Observação
 000000000
 000000000
 011111110 XCH1 = -4.000
 011111110 XCH2 = 2.210
 011111110
 000111000
 000111000
 000111000
 000111000
 000111000

COMPONENTES

ERRO MÉDIO QUADRADO

$Y \times Y_2$

21.8107

47.9278

Fig.4.22 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM AS COMPONENTES $(y, *Y_2)$. RESULTADO DO ERRO MÉDIO COM OS VETORES $(Y_1, Y_2) / (Y_3, Y_4)$. CONSIDERANDO O VALOR MÉDIO DO VETOR OBSERVAÇÃO.

Plano p/ação

```

* * : : e *
. . n . x
k k k k k
: : : k :
k k k
k k k
+-----* k k
      kkk
    
```

1- Observação

VALORES ESTIMADOS

```

000000011
000000011
000000000
000000000      XCH1   5.342
000000000      XCH2   5.422
000000000
000000000
000000000
000000000
    
```

2- Observação

```

111111000
111111000      XCH1 = 4.073
001111000      XCH2 = 8.407
000111000
000111000
000111000
000111000
000000000
000000000
    
```

COMPONENTES

ERRO MÉDIO QUADRADO

y_1, y_2 -

21.2950

47.5462

Fig-4.23 - "RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM AS COMPONENTES y_1, y_2 . RESULTADO DO ERRO MÉDIO COM OS VETORES $(y_1, y_2), (y_3, y^A)$ CONSIDERANDO A MÉDIA.

PLANO P»/AÇÃO

```

*kkkkkk
kkkkkkk
kk
*kA   kk k k
k k   k k k k
-----|----- .i. / A
      kk k kk kk
    
```

1- Observação

VALORES ESTIMADOS

```

000000011
000000011      XCH1   5.748
000000000      XCH2   5.814
000000000
000000000
000000000
000000000
000000000
000000000
    
```

2- Observação

```

001111111
001111111
001100000      XCH1 = 7.401
001101111      XCH2 = 7.337
001101111
001111111
001111111
000000000
000000000
    
```

COMPONENTES

ERRO MÉDIO QUADRADO

y_3, y_4

19.1369

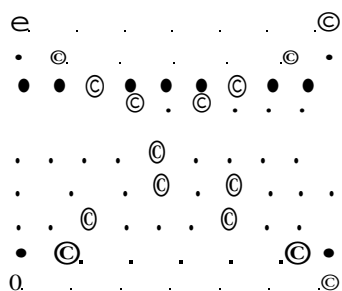
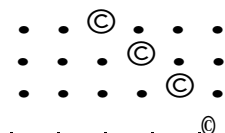
47.9875

Fig.4.24 - RESULTADO DA ESTIMAÇÃO COM AS COMPONENTES y_3, y_4 - RESULTADO DO ERRO MÉDIO COM OS VETORES $(y_1, y_2), (y_3, y^A)$ CONSIDERANDO A MÉDIA.

. © .

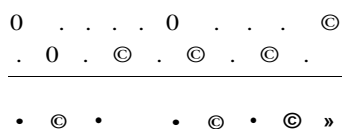
9 Componentes

$$f(\ddot{u}) = (u_1 u_2 u_3, \dots, u_9)$$



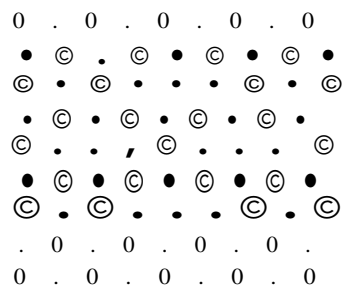
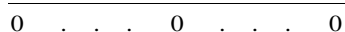
17 Componentes

$$f(\ddot{u}) = (V \dots, u_9, u_{10}, \dots, u_{17})$$



29 Componentes

$$f(U) = (\ddot{u}_x \dots V \ 1 \ 0 \ - \ 1 \ 7 \ ' \ W$$



37 Componentes

$$f(U) = (u_x, - \dots u_x u \dots U \ U \ \dots U$$

Fig.4.31 - COMPONENTES DO VETOR OBSERVAÇÃO n = 9.

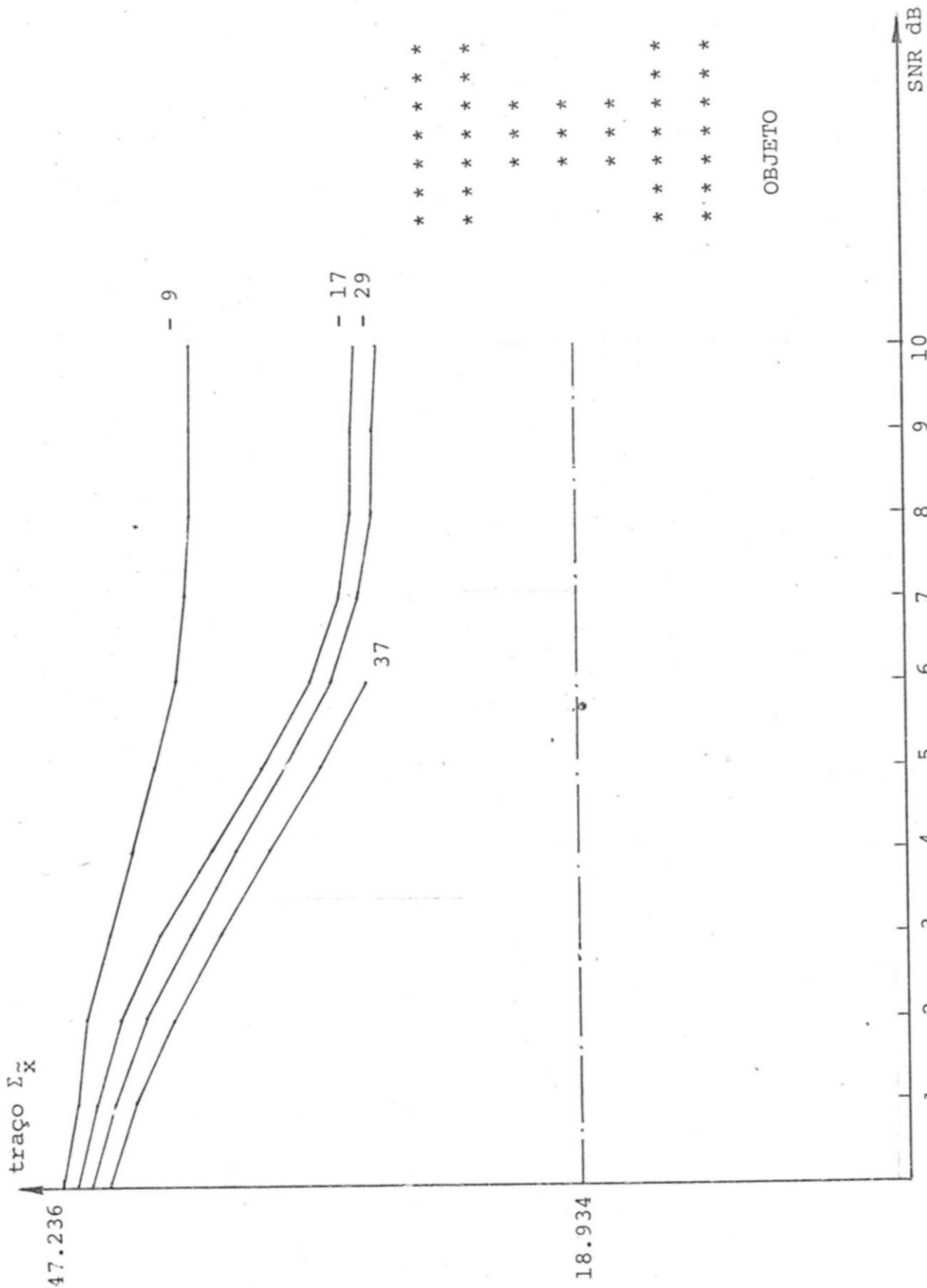


Fig.4.32 - GRÁFICO SNR dB x TRAÇO $\Sigma \bar{x}$.

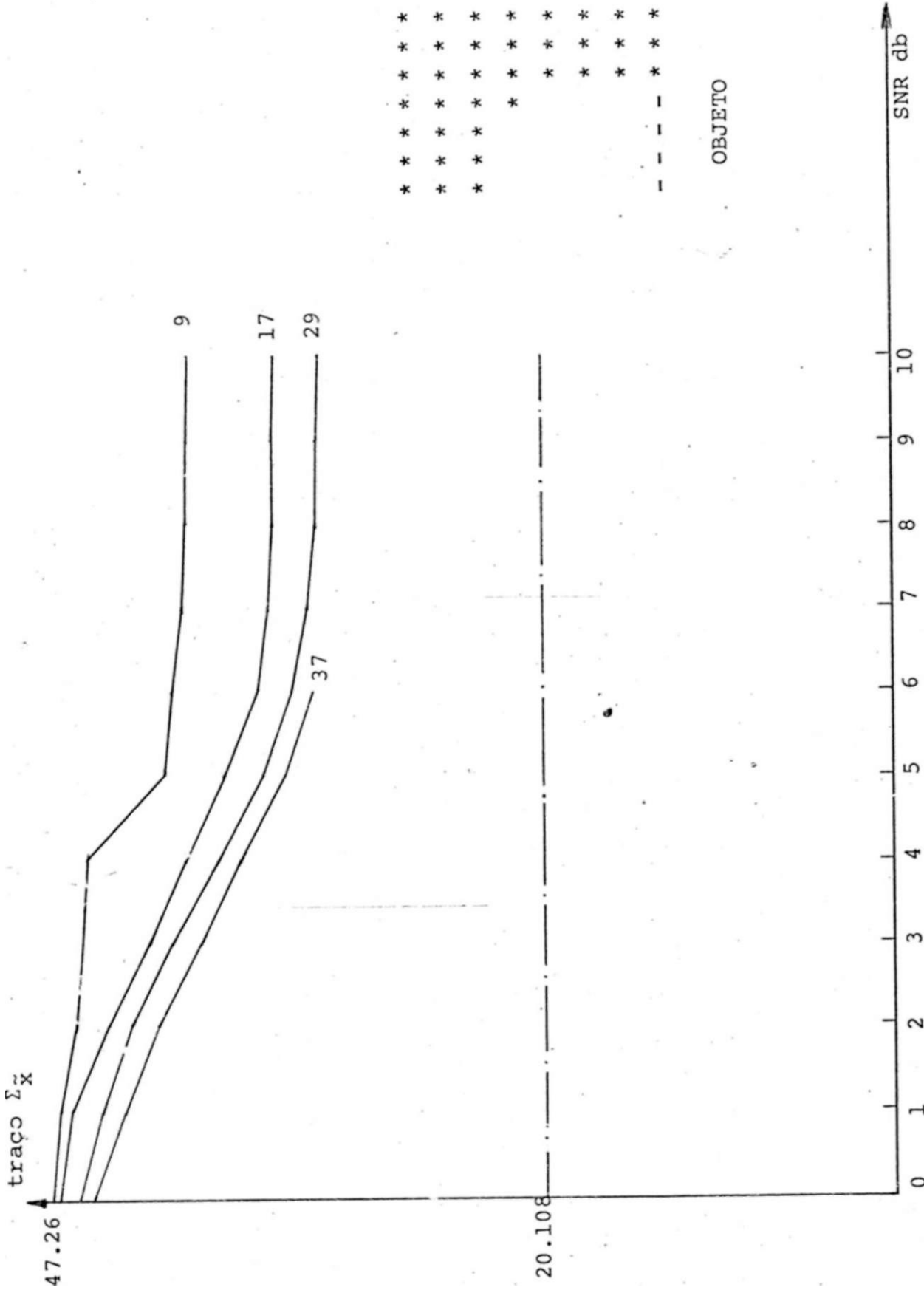


Fig. 4.34 - GRÁFICO RELAÇÃO SINAL-RUÍDO EM db VERSOS TRAÇO $\Sigma \bar{x}$.

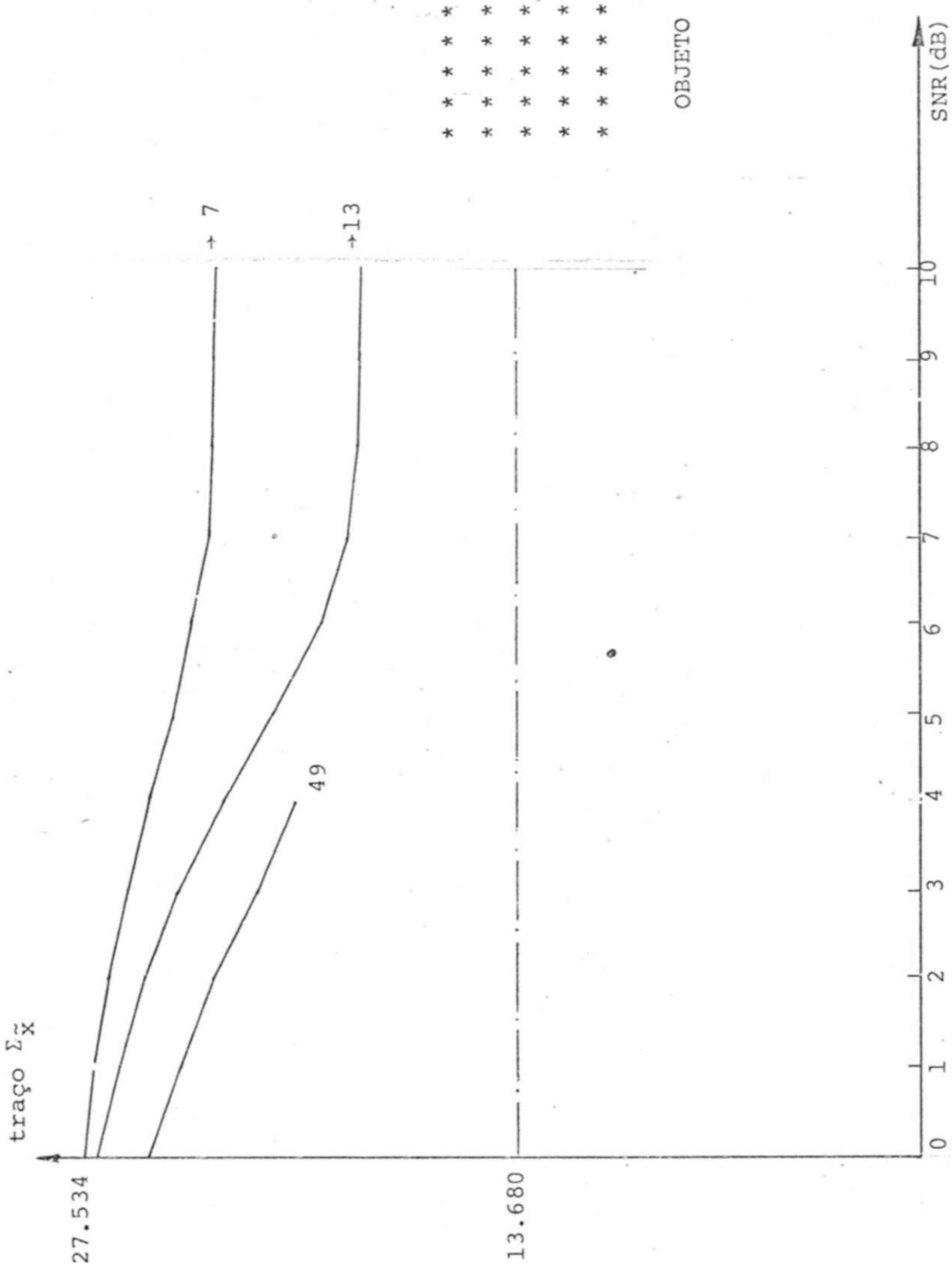
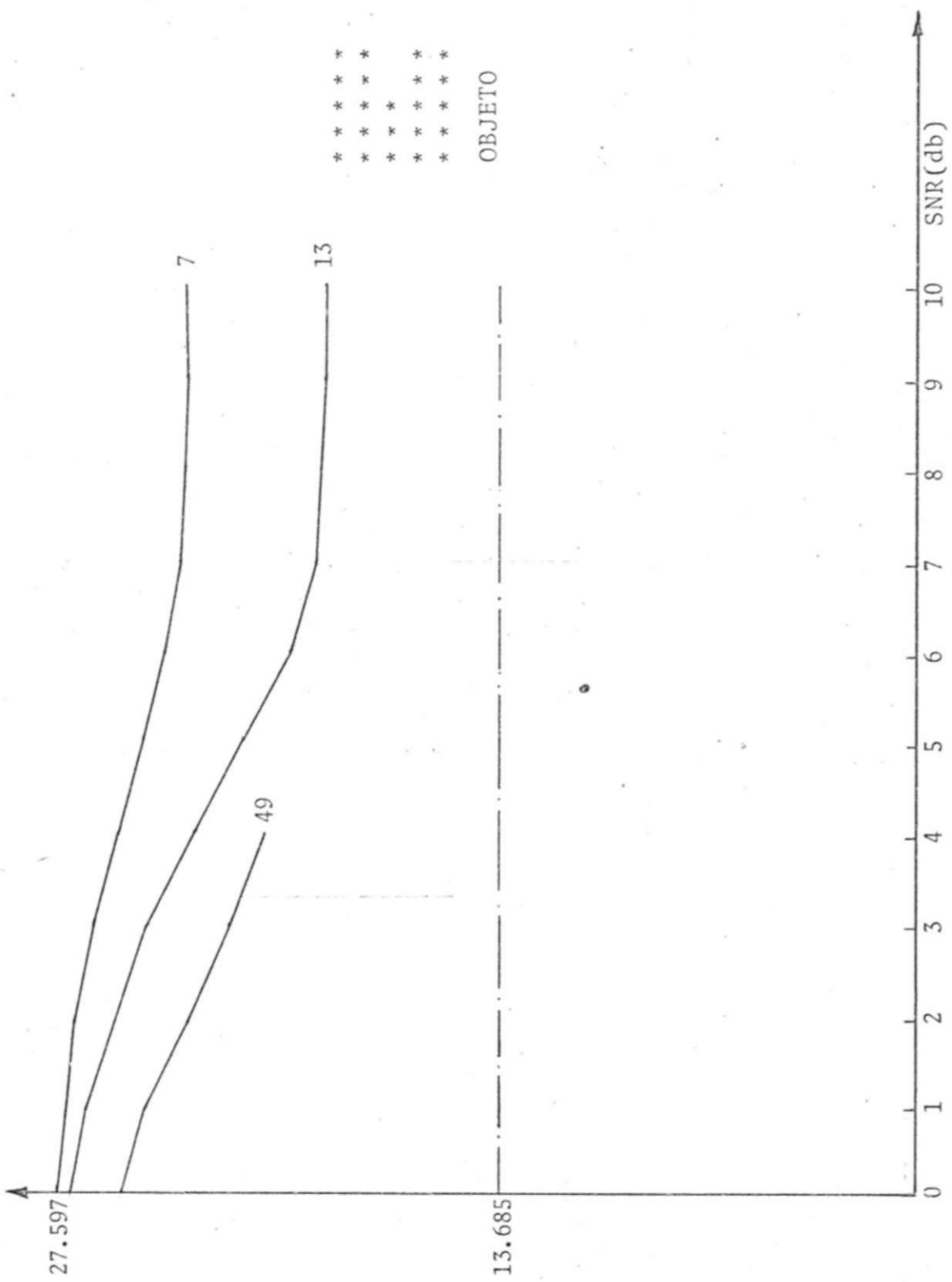


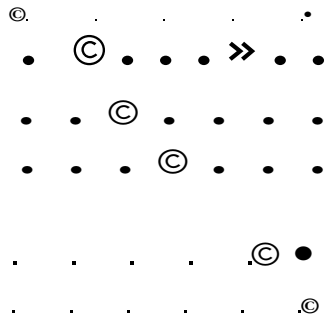
Fig.4.38 - GRÁFICO SNR(dB) x Traço $\Sigma \bar{x}$ MOSTRANDO O EFEITO DAS VARIÁÇÕES DAS COMPONENTES DO VETOR OBSERVAÇÃO.



* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *
* * * * *

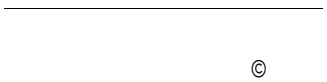
OBJETO

Fig. 4.39--GRÁFICO SNR (db) x Traço $\Sigma \bar{x}$ MOSTRANDO O EFEITO DAS VARIACÕES DAS COMPONENTES DO VETOR OBSERVAÇÃO.



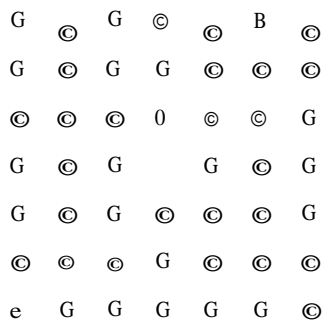
7 Componentes

$$f(u) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$$



13 Componentes

$$f(u) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots, u_{13})$$



49 Componentes

$$f(u) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, u_{26}, u_{27}, u_{28}, u_{29}, u_{30}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34}, u_{35}, u_{36}, u_{37}, u_{38}, u_{39}, u_{40}, u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{44}, u_{45}, u_{46}, u_{47}, u_{48}, u_{49})$$

Fig.4,30 - COMPONENTES DO VETOR OBSERVAÇÃO, n = 7.

CAPÍTULO - 5

CONCLUSÃO

5 - CONCLUSÃO

Naturalmente o algoritmo de estimação apresentado neste trabalho, ainda não é operacional sob o ponto de vista de aplicações em processos industriais que envolveria uma maior complexidade, entretanto, nos dá uma boa idéia das dificuldades envolvidas neste tipo de problema, fornecendo subsídios servindo como um ponto de partida na obtenção de algoritmos de estimação mais sofisticados.

Além das dificuldades com relação aos cálculos numéricos existentes e limitação dos recursos computacionais, fica evidenciado que a grande dificuldade associada com a estimação linear é justamente quanto as escolhas das componentes que formam o vetor observação no sentido de extrair informações da matriz proveniente da observação.

A composição dos vetores observação por componentes que são funções lineares da matriz $\hat{u}(t)$ é descartada, quando tratarmos do problema na ausência do ruído em consequência da singularidade das matrizes de autocorrelação ou autocovariância do vetor observação, principalmente por serem estes vetores constituídos por apenas, zeros e uns. Logo, neste caso é conveniente usarmos como componentes funções não lineares da matriz $U(t_0)$ e a ocorrência da singularidade pode ser eliminada por uma escolha apropriada desses vetores apenas isolando os componentes redundantes.

Na presença do ruído o problema é um tanto diferente, pois passamos a trabalhar com uma matriz resultante de uma decisão sobre a ocorrência de zeros ou de uns. As componentes usadas nestes casos são apenas. As funções lineares da matriz $V(t_0)$, isto porque associado ao modelo do ruído permite uma fácil computa-

ção dos elementos da matriz de autocovariância, o que não ocorreria se as funções das componentes fossem não lineares. Percebemos dos resultados obtidos a impossibilidade de se dizer algo com relação ao desempenho do algoritmo neste caso, pois caímos no problema de singularidade quando a relação sinal ruído aumenta.

Decorrente desse fato, ficaria mais simples se em vez de usarmos funções lineares passaríamos a compor o vetor observação por funções não lineares, e a transmissão dos dados seriam codificados através de códigos corretores de erro e o procedimento da estimação do baricentro permaneceria o mesmo como se não houvesse ruído.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) BANON,GERALD - "Reconhecimento..de Objetos Parcialmente Obser-
vados " .
Nota interna do Departamento de Eletrônica e
Sistemas/UFPE - 1981.
- (2) BANON,GERALD - "Estimação de Variáveis Aleatórii^s Aplicação a
Predição Linear".
Nota interna do Departamento de Eletrônica e
Sistcmas/UFPE - 1982.
- (3) PICINBONO/B. - "Reconnaissance des Formes et Traitement du Sic?
nal".
LSS - CNRS - ESE - 1977.
- (4) JR.DAVENPORT,W.B. - "Random Processes".
McGraw-Hill book campany - 1970.
- (5) PAPOULIS-A. - "Probability Random Variables and Stochastic
Processes".
McGraw-Hill book campany - 1965.
- (6) YOUNG,JOHN F. - "Robotics".
The butterworth group - London - 1?73.
- (7) FUKUNAGA,K, - "Introduction to Statistical Pattern Recognition".
Academic Press - 1972.

- (8) LUENBERGER, DAVID G. - "Optimization by Vector Space Methods".
John Wiley & Sons, Inc. - 1969.
- (9) MACCHI, CESAR - These de doctorat d'etat es science mathématiques: "Iteration Stochastic e Traitements Numeriques Adaptatives".
CNRS - France - 1972.
- (10) ANDREWS, A.C. - "Singular Value Decompositions and Digital Image Processing".
IEEE - Vol. ASSP - 24, N° 1, February - 1976.
- (11) ANDREWS, H.C. - "Computer Techniques in Image Processing".
Academic Press - 1970.
- (12) TRETTER, STEVEN A. - "Introduction to Discrete - Time Signal
Processing".
John Wiley & Sons - 1976.
- (13) SCHAWARTZ, MISCHA - "Transmissão de Informação e Ruído".
Guanabara Dois - 1979.

APÊNDICE - A

A1 - DEFINIÇÃO EQUIVALENTE DE X

$$X = EXY (EYY')^{-1} Y \quad \text{com probabilidade um}$$

Demonstração:

Sejam X e U duas variáveis aleatórias pertencentes ao espaço $(H^*)^n$, então X e U podem ser escritos na forma:

$$X = \hat{O}Y \quad \text{e} \quad U = GY$$

Da definição do estimador vem;

$$EX (GY)^{-1} = E (GY) (GY)^{-1}$$

ou seja

$$EXY^{-1}G' = EGY^{-1}G'$$

isto é:

$$(EXY^{-1} - EGY^{-1}G') G' = 0 \quad G \in R^{n \times m}.$$

Logo:

$$EXY^{-1} - EGY^{-1}G' = 0 \Rightarrow G = EXY^{-1} (EYY')^{-1}$$

se $\det EYY' \neq 0$.

Portanto:

$$X = EXY^{-1} (EYY')^{-1} Y$$

A2 - UNICIDADE DO ESTIMADOR

Sejam \hat{O} e G dois estimadores lineares dos mínimos quadrados, então:

$$\begin{aligned}
E |X - Z_1|^2 &= E |X - Z_2 + Z_2 - Z_1|^2 \\
&= E \{ |X - Z_2|^2 + 2(X - Z_2)^1 (Z_2 - Z_1) + |Z_2 - Z_1|^2 \} \\
&= E |X - Z_2|^2 + 2E(X - Z_2)^1 (Z_2 - Z_1) + E |Z_2 - Z_1|^2
\end{aligned}$$

Logo :

$$E |X - Z_1|^2 = E |X - Z_2|^2 + E |Z_2 - Z_1|^2 \quad (*)$$

Pois $E(X - Z_2)^1 (Z_2 - Z_1) = 0$ aonde $(Z_2 - Z_1) \in (H^\vee)^\perp$

Da definição sabemos que:

$$E |X - U|^2 < E |X - V|^2 \quad \forall U, V \in (H^\vee)^\perp$$

$$E |X - Z_2|^2 < E |X - V|^2 \quad \forall V \in (H^\vee)^\perp$$

Em particular para $U = Z_1$ e $V = Z_2$, temos

$$\begin{aligned}
E |X - Z_1|^2 &< E |X - Z_2|^2 \\
E |X - Z_2|^2 &< E |X - Z_1|^2
\end{aligned}$$

logo a igualdade se verifica, ou seja

$$E |X - Z_1|^2 = E |X - Z_2|^2$$

Consequentemente de (*) temos:

$$E |Z_2 - Z_1|^2 = 0 \quad \text{logo} \quad Z_2 = Z_1$$

APÊNDICZ - B

- Expressões usadas no cálculo das matrizes de covariância e auto-covariância.

BI - O VALOR ESPERADO DE X

Consideremos um objeto cujas coordenadas do baricentro são representada por X e Y como mostra a figura abaixo.

Para todo u e t existe um par (x^u, x^t) que fornece a posição do baricentro no plano de ação.

Por definição temos:

$$EX_i = \frac{EX_i}{EX_i} \quad \text{e} \quad EX_i = \sum_k x_{ik} P_{ik} \quad \text{com} \quad \sum_k P_{ik} = 1$$

ou simplesmente

$$EX_i = \sum_n x_{in} \cdot \frac{1}{n} P_{in}$$

Observe que $X^u(w)$ representa uma ordenada ou abscissa do baricentro do objeto na posição u no sistema de eixos ligado ao centro do plano de ação, então:

$$EX_i = \sum_k x_{ik} \cdot \frac{1}{k} P_{ik} \quad \text{ou} \quad EX_i = X_{BA}^u \quad \text{ou} \quad Y_{BA}^u$$

B2 - CORRELAÇÃO ENTRE X_e e V

Por definição:

$$EXV^* = \frac{EX_1, V_1 - EX_1 V_1}{EX_2, V_1 - EX_2 V_1}$$

O que nos interessa é estabelecer uma expressão que nos dê o valor esperado do produto X^i e V_j para todo i / j .

Sabemos que

$$EX_i V_j = E [Z X_i - V_j P f(x_i) = X_i / V_j = V_j, 1 = Z Z X_i (U_j) V_j, P L_j V_j = V_j, 1]$$

Expandindo a expressão sobre todos os valores em t_i e K temos:

$$\begin{aligned} E [X_i V_j] &= x_i (\dots) P [c_{i,j} V_j = 1] P [X_i (\dots) P^{A/V_j} = 1] \dots \\ &= x_i (U_j) P [U_j = A, Z > -A/2] + x_i (U_j) P [U_j = 0, Z > A/2] + \\ &+ X_i (0) P [U_j = A, Z > -A/2] + x_i (0) P [U_j = 0, Z > A/2] + \\ &+ \dots + X_i (\dots) P [U_j = A, Z > -A/2] + X_i (\dots) P [U_j = 0, Z > A/2] \end{aligned}$$

A ocorrência de $X_i (0) = x_i (\dots)$ e U_j assumam o valor 0 ou A independe do ruído, então:

$$P [X_i = x_i (\dots) , U_j = A, Z > -A/2] = P [X_i = x_i (\dots) , U_j = A] P [Z > -A/2]$$

$$P [X_i = x_i (0) , U_j = 0, Z > A/2] = P [X_i = x_i (aj) , U_j = 0] P [Z > A/2]$$

Então para todo coeficiente temos :

$$EX.V. = Z X. (to) \{P \ddot{u}), U. = A P | Z > -A/2 -fp \quad P \dot{I}. > V2 \}$$

$$EX.V. = Z X. (\ddot{u}) \{P \infty, U. = A (1 - P [z > A/2]) + P fco, V. = 0\} P | Z > A/2 J$$

já que $P \ddot{u}), U. = A$ $U. (\infty)$ ck

Então:

$$EX.V. = qA Z X. (co)U. (co) + qA \in X. (co)U. (co) \quad \text{aonde } p = P Z > A/2$$

$$q = 1 - p$$

ou ainda

$$EX.V. = IA \wedge X. (\infty) \{Ck + (1 - 2Ck)P [z > A/2]\} V i, j$$

aonde

$$Ck = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } U. (\infty) = 1 \\ 0 & \text{se o evento } U. (\infty) = 0 \end{cases}$$

B3 - O VALOR ESPERADO DE V_i «

Por definição:

$$EV. = O.P | V. = 0 * 1 + 1 . p | f v. = i | = p | V. |$$

$$= P j "U_i = A, Z > -A/2 \sim j + P | U_i = 0, Z > A/2'$$

Como o ruído, pela própria natureza do problema é independente da ocorrência de um A ou um zero temos:

$$V_i = P f \ddot{u}_i = A | P | Z > -A/2 J + P \dot{I} U \wedge O \wedge P [Z > A/2 * |$$

$$= P | U_i = A | + \{P | "U \setminus = O J - P J " U \setminus = A J \} P | Z > A/2$$

A probabilidade de $\ddot{u}=A$ corresponde a probabilidade 1 que o objeto caia nas posições w_{efi} tais que $\ddot{U} \cdot A$. O número de posições aonde se verifica a ocorrência de $\ddot{u}=A$ corresponde exatamente ao número de pontos n de massa unitária. Logo

$$P_{rb_i=Aj} = nA$$

$$EV_{\ddot{u}} = n/k + \binom{k-n}{n} - n/k \cdot P[Z > A/2]$$

Então: $EV_{\ddot{u}} = 1/k \{n + (k-2n)p[z > A/2]\}$

ou ainda:

$$EV_{\ddot{u}} = p/k \sum_{n=0}^k U_{(oi)} + qA \sum_{n=0}^k U_{(co)}$$

B4 - AUTOCORRELAÇÃO EV_{V_i} . PARA TODO $i \wedge j$

O valor esperado do produto é dado por:

$$EV_{V_i} = P \sum_{i=1}^J V_i = 1, V_i = 1 \text{ pois } V \text{ assume apenas os valores } 0 \text{ ou } 1.$$

A ocorrência de $V_i = 1$, e $V_j = 1$ inclui quatro possibilidades mutuamente exclusivas, como mostra a tabela abaixo:

u_i	Z_i	\ddot{u}_D	
A	$> -A/2$	A	$> -A/2$
0	$> A/2$	A	$> -A/2$
A	$> -h/2$	0	$> A/2$
0	$> A/2$	0	$> A/2$

Então:

$$\begin{aligned}
 & |V_i=1, V_j=1\rangle = P |U_i=A, Z_i > -A/2, \ddot{u}_i=A, Z_i > -A/2 + \\
 & + P |U_i=0, Z_i > A/2, U_j=A, Z_j > -A/2\rangle + P |U_i=A, Z_i > -A/2, U_j=0, Z_j > A/2\rangle \\
 & + P |U_i=0, Z_i > A/2, U_j=0, Z_j > A/2\rangle
 \end{aligned}$$

Como o ruído ataca cada ponto da matriz independente - mente entre si temos:

$$\begin{aligned}
 P |V_i=1, V_j=1\rangle &= P |\ddot{u}_i=A, \ddot{u}_j=A\rangle P |Z_i > -A/2\rangle P |Z_j > -A/2\rangle + P |j\ddot{u}_i=0, \ddot{u}_j=A\rangle \\
 P |Z_i > A/2\rangle & P |Z_j > -A/2\rangle + P |U_i=A, U_j=0\rangle P |Z_i > -A/2\rangle P |Z_j > A/2\rangle + P |U_i=0 \\
 , \ddot{u}_j &= 0\rangle P |Z_i > A/2\rangle P |Z_j > A/2\rangle
 \end{aligned}$$

Sem perda da generalidade fazendo-se $A=1$, temos:

$$\begin{aligned}
 P [\ddot{u}_i = A, U_i = A] &= 1/k \int U_i(t) U_i(w) \\
 P [u_i = A, U_j = A] &= 1/k \int U_i(w) \ddot{U}_j(t)
 \end{aligned}$$

então:

$$EV_{i3} \cdot V_{i3} = q^2/k \int U_i(t) U_i(w) + q \cdot p/k [EU_i(t) U_i(t) + \int U_i(\ddot{u}) \ddot{u}_i(t) +$$

$$+ p \int U_i(u) U_i(u) \quad i \neq j$$

Quando $i = j$ temos:

$$\ddot{u}_i \cdot \ddot{u}_i = \ddot{u}_i \cdot \ddot{u}_i = P [\ddot{u}_i \cdot \ddot{u}_i]$$

ou seja:

$$EV = p \int U_i(w) + q/k \int U_i(w)$$